



Université Joseph Fourier à Grenoble

Dynamique des fluides viscoplastiques à interface libre

Stage de Master 2

présenté et soutenu publiquement le 22 juin 2007

pour l'obtention du grade :

Master Recherche de l'Université Joseph Fourier

(spécialité **Mathématiques Appliquées**)

par

Aymen LAADHARI

Responsables du stage

Responsable du master : Éric BONNETIER

Encadreurs : Pierre SARAMITO
Vuk MILISIC

La rédaction de ce mémoire et le développement des différents codes de calcul ainsi que la présentation graphique des résultats numériques ont été réalisés sous les systèmes d'exploitations Debian GNU/Linux et Windows en utilisant Matlab et des outils libres et/ou gratuits : thloria, LaTeX, Emacs et Freefem++.

À la mémoire de Toutta,
Décédée le 22 mai 2007

Remerciements

Le bon déroulement de ce stage de Master est en grande partie imputable à Pierre Saramito et Vuk Milisic. Je les remercie du fond de coeur, aussi pour avoir dirigé mes travaux avec talent que pour m'avoir accompagné amicalement dans ce cheminement. Leurs énergies, leurs compétences et leurs constantes disponibilités sont autant de qualités sans faille que j'apprécie chez eux et qui m'ont beaucoup aidé pour mener à bien ce travail. Ce fut un réel plaisir de les avoir comme encadreurs et c'est une chance de les avoir comme amis. J'espère encore apprendre de leur contacts.

Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude à Éric Bonnetier pour la confiance qu'il m'a témoigné en m'acceptant dans ce master. Ses qualités scientifiques et humaines sont pour beaucoup au bon fonctionnement des études. Je le remercie profondément pour tous ses conseils, ainsi que pour son encouragement continu.

Faire partie du laboratoire LJK, même en tant que stagiaire, est sans doute un avantage ; non seulement par les conditions offertes mais aussi grâce à la convivialité qui y règne. Que tous ses membres trouvent ici mes sincères remerciements. Je remercie particulièrement Faouzi Triki et Christophe Prud'homme pour les précieux conseils qu'ils m'ont donné et de l'intérêt qu'ils m'ont donné à mon travail.

Un être exceptionnel, fascinant, modeste, compétent, chaleureux et extraordinairement humain, c'est à Chaouqi Misbah que je dois énormément. Il a su me donner beaucoup, plus que quiconque dans ma vie, avec sourire et bonne humeur, sans que je ne lui demande rien. Celà, je ne pouvais le lui rembourser autrement qu'en profitant de ces quelques lignes pour lui adresser mes vifs remerciements.

Je tiens aussi à remercier Mourad Ismail pour son encourageant continu et son amitié sincère.

Merci à Robin et Claire qui ont participé (supporté) mon quotidien au bureau 34. Je leur souhaite une bonne chance dans leurs thèses. Je tiens également à remercier mes amis au laboratoire LSP, particulièrement Badr, Christophe et Maude.

En Tunisie, j'ai eu la chance de connaître Lassaad El Asmi : mon professeur de Calcul scientifique à l'Ecole Polytechnique de Tunisie. Je le remercie énormément pour son suivi et ses conseils.

Je n'oublierai certainement pas mes chers amis Dali, Ramzi, Si Lèmine, Claude 'Vispa', Ali 'Edjéja' et Hédi 'Thoubéba' sans oublier Fethi 'Machékel'. Un clin d'oeil particulier à Helmi que je lui souhaite une bonne chance dans son Bac.

Je termine enfin par ceux que je ne pourrais jamais remercier par des mots, que eux seuls auront le courage et la patience de lire ces pages jusqu'au bout : je pense à vous, mes chers parents et ma soeur. Vos encouragements et votre soutien n'ont jamais fait défaut.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des figures	ix

Introduction

Chapitre 1

Les coulées de laves : une réalité physique vers un modèle mathématique

1.1	Approche physique	6
1.1.1	L'écoulement des laves	6
1.1.2	Loi de comportement	7
1.2	Modèle mathématique	8

Chapitre 2

Étude de la zone de jonction : la problématique du raccord

2.1	Présentation de la problématique	12
2.1.1	Notations	12
2.1.2	Solution approchée	13
2.2	Méthode des développements asymptotiques raccordés : étude d'un cas simple	14
2.2.1	Le raccord	16
2.3	Raccord du champ vertical de la vitesse	18
2.4	Raccord de la vitesse horizontale et reconstruction du champ solution .	19
2.5	Conclusion	22
2.5.1	Résumé de la solution approchée	22
2.5.2	Approximation globale de la solution	23

Chapitre 3

Étude du modèle cinématique

3.1	Méthode de résolution numérique	28
3.2	Problème à résoudre	28
3.2.1	Présentation du problème physique	28
3.2.2	Système d'équations	29
3.3	Discrétisation par la méthode des différences finies	29
3.3.1	Discrétisation temporaire	29
3.3.2	Discrétisation spatiale	30
3.4	Simulations numériques	32
3.4.1	Estimation d'énergie	32
3.4.2	Conservation du volume	33
3.4.3	Résultats numériques	34

Chapitre 4

Étude de l'écoulement dans un canal infini

4.1	Présentation du problème	42
4.2	Adimensionalisation des équations	44
4.3	Modèle asymptotique	46
4.4	Simulations numériques	48
4.4.1	Modèle approché	48
4.4.2	Résultats numériques	48
4.4.3	Conclusion	54

Conclusions et perspectives	55
------------------------------------	-----------

Annexes

Annexe A	
Développements multi-échelles du système de Bingham	59
A.1 Position du problème	59
A.2 Adimensionalisation des équations	61
A.2.1 Notion d'échelle	61
A.2.2 Adimensionalisation	61
A.3 Développement asymptotique	63
A.3.1 Définition d'un développement asymptotique	63
A.3.2 Régime fluide	63
A.3.3 Une fausse surface critique	66
A.3.4 Le régime semi-régide	67
A.3.5 Modèle cinématique	69
Index	69
Index	71
Bibliographie	73
Bibliographie	

Table des figures

1.1	Fluide en écoulement sur un plan incliné	8
2.1	Notations des différentes zones	12
2.2	La discontinuité de la vitesse horizontale au niveau de la surface de séparation	14
2.3	Les différentes zones	15
2.4	Solution exacte et solution approchée	18
2.5	Zoom sur la zone du raccord	18
2.6	Représentation de la couche limite	19
2.7	La fonction de troncature \mathcal{X}	24
3.1	Représentation du barrage avant la rupture	28
3.2	Résultats obtenus à $t = 15$ secondes pour $B = 0$	35
3.3	Profil de la surface libre en fonction de B à $t = 1.4 \times 10^4$	35
3.4	Évolution de la surface libre pour $B = 0$ en fonction du temps	36
3.5	Évolution du front en échelle Logarithmique	37
3.6	Évolution du front en \sqrt{t} pour les temps moyens	37
3.7	Évolution du front $t^{1/5}$ pour les temps élevés	38
3.8	Évolution des points $A_b, A_m, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ pour $t \in [0, 100]$	39
3.9	Évolution du volume relatif pour $B \in \{0.5, 0.3, 0.1, 0.05, 0.01\}$ et $t \in [0, 100]$	39
4.1	Modèle constitutif du fluide de Bingham et sa régularisation	48
4.2	Évolution de l'écart entre la solution approchée et la solution numérique en fonction de ε dans le cas newtonien	49
4.3	Évolution de l'écart entre la solution approchée et la solution numérique en fonction de ε pour $B = 1.3$	50
4.4	Profil numérique et asymptotique du champs de vitesse en fonction du nombre de Bingham	51
4.5	Etablissement du régime en échelle Décimale	52
4.6	Effet de la régularisation de la Singularité	53
A.1	Fluide en écoulement	63

RÉSUMÉ :

L'objectif de ce mémoire est de parvenir à décrire la dynamique des coulées de laves volcaniques ainsi que la chute des avalanches le long des montagnes dans le cadre d'une modélisation par les méthodes de différences finies et d'éléments finis et en s'appuyant sur la technique des développements asymptotiques raccordés. C'est un travail de nature théorique et numérique et il a pour objectif de finaliser un travail qui a été abordé par les deux chercheurs Balmforth et Craster [2].

Le premier chapitre sera consacré à la présentation du modèle des fluides viscoplastiques de Bingham.

Dans un second chapitre, on présente les résultats théoriques sur le raccord des profils des vitesses et on construit une solution approchée du champs de vitesse.

La troisième chapitre est consacré aux résultats obtenus par les simulations numériques ainsi que les interprétations et les explications correspondantes.

La dernière partie consiste à traiter le modèle d'écoulement des fluides de Bingham dans un canal incliné. C'est un cas simple avant d'aborder l'écoulement du sang dans les arêtes : ceci pourra faire l'objet des prochains travaux.

Bingham, viscoplastique, surface critique, zone rigide, zone fluide, tenseur de contrainte, Navier-Stokes, coulée de laves, avalanches

ABSTRACT :

The subject of this memory is to describe the dynamics of the volcanic lava with free boundary, we use the Finite Difference Method and the Finite Element Method. Concerning the theoretical part of this study, it is based on the method of Matched Asymptotic Expansions.

The first chapter is devoted to the the presentation of the Visco-plastic fluid of Bingham. We show on the second chapter theoretical results done in order to find approached solution for the model of Bingham.

In the third chapter, we present the results of the numerical simulations as well as their explanations.

Finally, we present the case of Bingham flows into pipelines and we present theoretical and numeric results.

Bingham, visco-plastic, pseudo-plug, plug region, yield stress, fake yield stress, Navier-Stokes, yield surface, plastic regime, Matched Asymptotic Development, Multiscle Asymptotic Development

Introduction

Les écoulements viscoplastiques sont au centre des préoccupations d'un grand nombre de mathématiciens, physiciens, biologistes ou industriels. Nombreux sont les phénomènes naturels ou procédés industriels qui vont intervenir ces écoulements, parmi lesquels, on peut citer les cas de la circulation du sang dans les artères et des combustibles dans les pipelines. C'est aussi le cas par exemple des chutes des avalanches ou de coulées de laves volcaniques.

La coulée de lave le long d'une pente est un phénomène extrêmement complexe qui est au coeur des recherches scientifiques depuis très longtemps, et sans doute pour de nombreuses années encore.

Ainsi, ce travail de recherche porte sur la modélisation de problèmes aux frontières libres en mécanique des fluides à travers l'exemple de la dynamique des coulées de laves volcaniques. Ces problèmes possèdent suffisamment de richesses pour faire l'objet d'une étude spécifique : ce sont des systèmes modèles de fluides viscoplastiques. Ils sont caractérisés par la présence d'une interface libre qui est susceptible d'évoluer au cours de la dynamique. Ce type d'étude constitue en fait une première étape vers la modélisation et la compréhension du rôle de l'interfaces dans le comportement mécanique des fluides viscoplastiques. Ces derniers sont appelés des fluides à seuil : ils peuvent s'immobiliser sur une pente non nulle donc avec une résultante des forces extérieures non nulle. Pour que le fluide se met en mouvement, il faut que la contrainte dépasse une contrainte seuil. Par conséquent, ces fluides sont caractérisés par la présence de deux zones qui dépendent de la valeur de la contrainte par rapport à une contrainte seuil.

On note que dans tout le travail, on va traiter le cas de la présence d'une dimension de l'écoulement qui est largement supérieure à une autre dimension. Ceci nous permet d'utiliser les méthodes asymptotiques.

Dans le premier chapitre, on présente une description du modèle des fluides viscoplastiques de Bingham. On aborde le modèle de tels écoulements à travers une approche physique qui met en évidence leurs importances dans la vie de l'Homme ainsi que la richesse et la complexité du modèle. Ensuite, on présente le modèle du point de vue mathématique et on précise les différentes notations qui seront utilisées dans la suite du rapport.

Le deuxième chapitre est davantage concentré sur les aspects théoriques de ce travail. On va s'intéresser notamment à la méthode des Développements Asymptotiques Raccordés et principalement la création d'une zone intermédiaire de raccort entre les profils de vitesses déterminés dans les travaux de Balmforth et Craster [2]. Dans l'annexe A de ce rapport, ces travaux ont été rédigés de manière détaillée et plus claire que celle avec laquelle l'article

[2] a été présenté.

Le troisième chapitre fera l'objet de la partie numérique de ce stage. En effet, Balmforth et Craster montrent que le modèle de Bingham est équivalent à un modèle réduit qui décrit l'évolution de l'interface libre du fluide au cours du temps. Les simulations numériques portent alors sur ce modèle et l'objectif est de vérifier si le modèle réduit décrit bien la physique des fluides viscoplastiques. On compare les résultats obtenus avec d'autres résultats connus.

Avant de conclure ce document, un quatrième et dernier chapitre est consacré aux écoulements le long d'un canal infini. C'est un modèle type des pipelines et il constitue une première approche avant d'aborder l'écoulement du sang dans les artères.

Chapitre 1

Les coulées de laves : une réalité physique vers un modèle mathématique

Sommaire

1.1	Approche physique	6
1.1.1	L'écoulement des laves	6
1.1.2	Loi de comportement	7
1.2	Modèle mathématique	8

L'objectif de chapitre est d'aborder le modèle des écoulements viscoplastiques à travers une approche physique. En réalité, les exemples de tels fluides sont nombreux et on cite, à titre d'exemples : les chutes de neiges, la circulation du pétrole dans les pipelines, la circulation du sang dans les vaisseaux sanguins et les coulées de laves volcaniques.

Il existe plusieurs modèles mathématiques pour décrire les fluides viscoplastiques. Dans ce travail, on s'intéresse au modèle de Bingham. Il fera l'objet de la deuxième partie de ce chapitre introductif.

1.1 Approche physique

1.1.1 L'écoulement des laves

Lorsque un volcan entre en éruption, il émet des coulées de lave caractéristiques. Cette lave, fluide ou visqueuse, coule rapidement avant de se refroidir lentement. Sa température peut aller jusqu'à plus de 1500 degrés, mais en profondeur, à l'intérieur du magma, la lave peut aller à des températures jusqu'à plus de 5000 degrés. Cette lave, rougeoyante lorsque elle est en fusion, virant au jaune clair lorsque la température monte, est dangereuse pour les hommes.

Lorsque une éruption assez importante se déclenche, des pans entiers du dôme de lave se détachent et dévalent les pentes à des dizaines kilomètres par heures. Ces coulées peuvent être très dangereuses pour les populations humaines, notamment par la rapidité de ces coulées, par la taille, mais surtout par la puissance de l'éruption, qui peut détruire une ville entière en quelques heures. De plus, ces coulées peuvent aller très loin par rapport à l'épicentre de l'éruption, ce qui augmente les chances de destruction d'une zone habitée près du volcan, même à des kilomètres de celui-ci.



Coulée de lave

Comme les laves sont encore aujourd'hui peu connues, des nouvelles recherches en physique voient le jour pour permettre de mieux comprendre le phénomène et ainsi mieux s'en protéger. Trois approches sont complémentaires pour étudier les laves :

- L'approche théorique ;
- L'approche expérimentale ;
- La modélisation.

Actuellement, la modélisation se développe notamment pour améliorer les aménagements de protection : le problème est la détermination de la loi de similitude permettant

de passer de la réalité au modèle. Il faudrait pour ça connaître toutes les forces gouvernant le comportement des laves et ainsi construire un fluide modèle.

1.1.2 Loi de comportement

Les laves n'ont pas le comportement d'un fluide newtonien, ce sont des fluides à seuil.

En effet, une lave peut s'immobiliser sur une pente non nulle donc avec une résultante des forces extérieures non nulle. Il faut que le cisaillement appliqué dépasse un certain seuil pour que le fluide soit cisailé, c'est la rigidité initiale. Ce seuil de contrainte est dû aux interactions entre les particules formant un réseau dans tout le fluide : il doit être brisé pour permettre l'écoulement.

Lors de l'écoulement, on distingue entre deux zones qui dépendent de la valeur de la contrainte par rapport à une contrainte seuil. Le schéma ci-dessous met en évidence la zone rigide près de la surface libre, la vitesse y est constante mais cette région se déplace plus rapidement car elle se situe au-dessus de la zone cisailée.

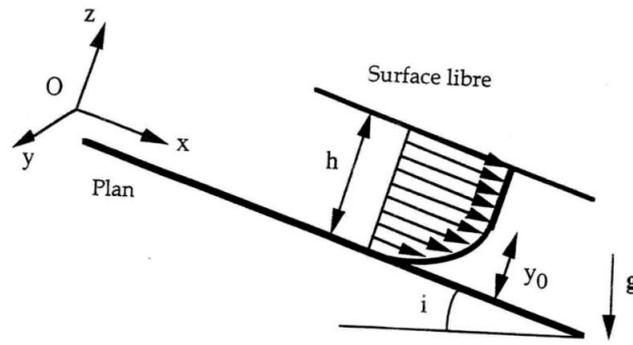
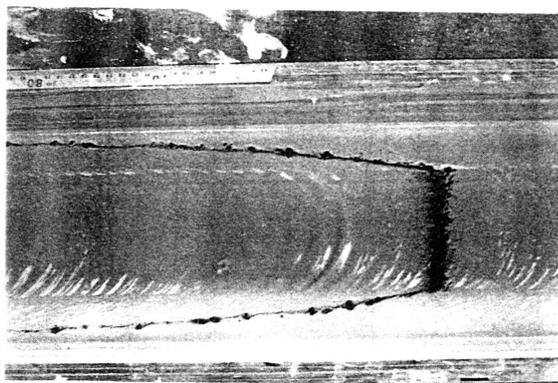


Schéma de l'écoulement d'un fluide à seuil sur un canal incliné

De point de vue expérimental, on affiche une vue de dessus de l'écoulement d'un mélange boueux fin formé de l'eau et d'une matière appelée 'kaolin' dans un canal. Elle a été effectuée par les étudiants de la M.S.E. de l'Université de Savoie à Chambéry :



On observe une ligne de poudre noire déposée à la surface, perpendiculairement à la direction d'écoulement, qui est déformée d'une manière qui est caractéristique de l'écoulement uniforme d'un fluide à seuil : près des bords du canal, le fluide est cisailé, la ligne

est d'autant plus déformée qu'on se rapproche du bord ; la partie centrale de l'écoulement n'est pas cisailée, la ligne conserve sa forme initiale. Le profil des vitesses ainsi obtenu, d'un bord à l'autre du canal, reflète tout à fait le profil dans une section longitudinale perpendiculaire au fond.

Finalement, on remarque que le point en commun de tous les exemples cités ci-dessous est la présence d'une dimension qui est largement supérieure à une autre dimension. Dans les cas de chutes de neiges, de circulation de combustibles dans les pipelines, de circulation du sang dans les vaisseaux sanguins et de coulées de laves volcaniques, l'épaisseur de l'écoulement représente la faible dimension.

1.2 Modèle mathématique

On considère un fluide de Bingham soumis à l'action de son propre poids sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Soit \mathbf{g} la constante de gravité et $\mathcal{R}(x, z)$ un repère lié au plan de l'écoulement. On note \mathbf{n} la normale au point de coordonnées (x, y) à l'instant t .

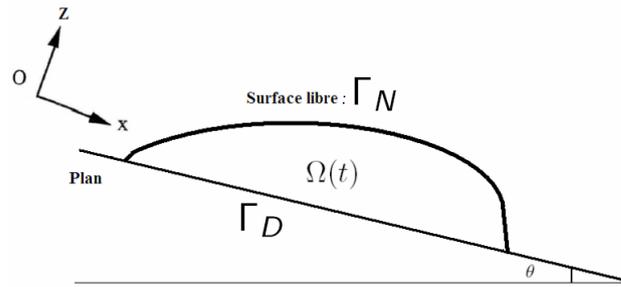


FIG. 1.1 – Fluide en écoulement sur un plan incliné

Le fluide est caractérisé par sa masse volumique ρ , sa viscosité $\eta = \rho\nu$, ν est la viscosité cinématique. Soit τ_p le seuil de contrainte : c'est une caractéristique des fluides viscoplastiques.

Concernant les paramètres décrivant la dynamique du fluide, le vecteur vitesse est noté $\mathbf{u} = (u, v)$ et le tenseur des contraintes est $\bar{\tau}$. La surface libre est décrite par h et le champ de pression est p .

Le tenseur de contraintes total est appelé aussi tenseur de Cauchy. Il a pour expression :

$$\sigma_t = -p\mathcal{I} + \bar{\tau}$$

\mathcal{I} est le tenseur identité.

Le tenseur symétrique de déformation est :

$$\mathbf{D}(u) = \frac{\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T}{2}$$

Dans le cas 2D, on note $\dot{\gamma}_{xx}, \dot{\gamma}_{xz}, \dot{\gamma}_{zx}, \dot{\gamma}_{zz}$ les composantes du tenseur du cisaillement :

$$\bar{\gamma} = 2\mathbf{D}(u)$$

En utilisant la convention d'Einstein, on définit la norme matricielle :

$$\|\tau\| = \frac{1}{2}\sqrt{\tau : \tau} = \frac{1}{2}\sqrt{\tau_{jk}\tau_{jk}}$$

On note respectivement :

$$\dot{\gamma} = \|\bar{\gamma}\|$$

$$\tau = \|\bar{\tau}\|$$

Le fluide sera décrit par le domaine :

$$\Omega(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq h(x, t)\}$$

Le fond de l'écoulement est noté $\Gamma_L(t)$. La frontière libre est $\Gamma_D(t)$.

Le modèle de Bingham sera formé par les équations suivantes :

① Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \mathbf{div} \bar{\tau} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \quad (1.1)$$

② Conservation de la masse :

$$\mathbf{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.2)$$

③ Loi constitutive :

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \left(2\eta + \frac{\tau_p}{\|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|} \right) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad \text{si } \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\| \neq 0 \\ \tau &\leq \tau_0 \quad \text{si } \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\| = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

④ Condition à la surface libre :

$$\sigma_T \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{si } z = h(t, x) \quad (1.4)$$

⑤ Condition au fond : Non glissement + Non pénétration

$$u = w = 0 \quad \text{si } z = 0 \quad (1.5)$$

☞ Il s'agit de résoudre (1.1-1.5), \mathbf{u} et $\bar{\tau}$ sont les inconnues.

Chapitre 2

Étude de la zone de jonction : la problématique du raccord

Sommaire

2.1	Présentation de la problématique	12
2.1.1	Notations	12
2.1.2	Solution approchée	13
2.2	Méthode des développements asymptotiques raccordés : étude d'un cas simple	14
2.2.1	Le raccord	16
2.3	Raccord du champ vertical de la vitesse	18
2.4	Raccord de la vitesse horizontale et reconstruction du champ solution	19
2.5	Conclusion	22
2.5.1	Résumé de la solution approchée	22
2.5.2	Approximation globale de la solution	23

2.1 Présentation de la problématique

Nous intéressons à la recherche de solutions approchées du système viscoplastique de Bingham contenant un petit paramètre ϵ à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. La justification mathématique d'une telle méthode n'est pas encore parfaite. Il faut bien voir que l'existence de ces méthodes ne résulte pas d'une démarche axiomatique du type de celle employée par les mathématiciens mais qu'elles ont été construites par des mécaniciens et des physiciens pour résoudre des problèmes. Nous ne chercherons pas dans ce travail la justification de telles méthodes, notre objectif est trouver une solution approchée qui s'approche d'autant plus de la solution exacte que ϵ est petit.

Dans cette section, nous rappelons les solutions de vitesses obtenues suite aux travaux de Balmforth et Craster. On met en évidence la rupture de la continuité dans la solution obtenue par rapport à la solution physique ainsi que la présence de constantes qu'on doit trouver afin de finaliser la solution approchée.

2.1.1 Notations

On rappelle que toutes les quantités utilisés dans ce chapitre sont adimensionalisées (voir annexe A). On utilise les notations suivantes respectivement pour la zone cisailée et la zone semi-solide : voir figure 2.1.

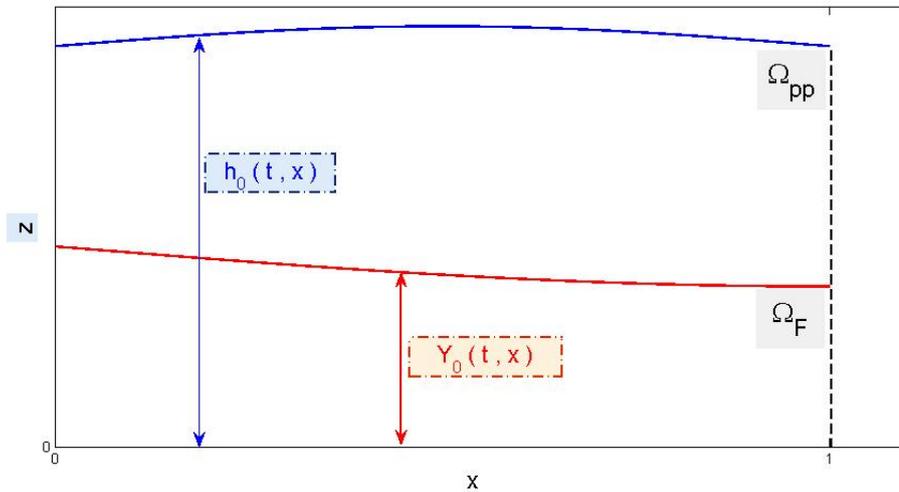


FIG. 2.1 – Notations des différentes zones

$$\Omega_F(t) = \{(x, z) \in \Omega(t) / 0 \leq z < Y_0(x, t)\} \quad (2.1)$$

$$\Omega_{PP}(t) = \{(x, z) \in \Omega(t) / Y_0(x, t) \leq z \leq h_0(x, t)\} \quad (2.2)$$

2.1.2 Solution approchée

On rappelle que Y_0 représente la surface de séparation entre le régime fluide et le régime semi-rigide. Elle est donnée par :

$$Y_0(x, t) = h_0(x, t) - \frac{B}{S-h_{0x}} \quad (2.3)$$

La vitesse possède deux composantes : verticale notée $w(x, z, t)$ et horizontale notée $u(x, z, t)$.

Pour la composante $w(x, z, t)$, on distingue deux profils :

1. Dans Ω_F , le profil est donné par (A.23) :

$$w_0(x, z, t) \approx \frac{1}{2}z^2 \left[\psi_{0xx} \left(Y_0(x, t) - \frac{1}{3}z \right) - Y_{0x}(S - \psi_{0x}(x, t)) \right] \quad (2.4)$$

2. Dans Ω_{pp} , le profil est donné par (A.40) :

$$w_0(x, z, t) \approx w_0(x, h_0(x, t), t) + u_{0x}(x, t)[h_0(x, t) - z] \quad (2.5)$$

Pour $u(x, z, t)$, on a :

1. Dans $\Omega_F(t)$, la vitesse horizontale est donnée par l'équation (A.22) :

$$u^F(x, z, t) \approx u_0(x, z, t) \quad (2.6)$$

2. Dans $\Omega_{pp}(t)$, la vitesse horizontale est donnée par (A.31) :

$$u^{pp}(x, z, t) \approx u_0(x, Y_0(x, t), t) + \varepsilon u_1(x, z, t) \quad (2.7)$$

$u_0(x, z, t)$ est donnée suivant (A.22) par :

$$u_0(x, z, t) \approx z \left(Y_0(x, t) - \frac{1}{2}z \right) (S - \psi_{0x}(x, t)) \quad (2.8)$$

$u_1(x, z, t)$ est suivant (A.39) :

$$u_1(x, z, t) \approx u_1(x, h_0(x, t), t) - \frac{2B}{S-h_{0x}(x,t)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(S-h_{0x}(x,t))^2}{B^2} (h_0(x, t) - z)^2} \right] \quad (2.9)$$

Afin de construire un profil approché de la solution, on est censé trouver les termes constants $u_1(x, h_0(x, t), t)$ et $w_0(x, h_0(x, t), t)$.

On note que le profil de la vitesse horizontale construit à ce stage est discontinu au niveau de la surface de séparation entre $\Omega_F(t)$ et $\Omega_{pp}(t)$ comme le montre la figure 2.2. La détermination des constantes et la construction d'un profil continu fait l'objet du travail qui sera présenté dans la suite du chapitre.

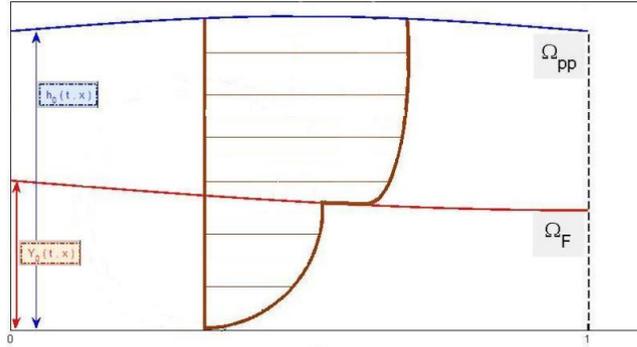


FIG. 2.2 – La discontinuité de la vitesse horizontale au niveau de la surface de séparation

2.2 Méthode des développements asymptotiques raccordés : étude d'un cas simple

Nous allons montrer comment on trouve les solutions approchées et faire le bon raccord et ce par le biais d'un exemple simple dont on connaît la solution. Soit à résoudre :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} = 2 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

Ce problème admettant une solution aisément calculable, nous comparerons par la suite la solution approchée et exacte. Recherchons une solution du problème (2.10), sous la forme du développement asymptotique :

$$f(x, \varepsilon) = \nu_0(\varepsilon)f_0(x) + \nu_1(\varepsilon)f_1(x) + \dots \quad (2.11)$$

avec $\nu_0(\varepsilon) \gg \nu_1(\varepsilon)$.

En injectant dans (2.10), on obtient :

$$\begin{cases} \varepsilon \nu_0(\varepsilon) \frac{d^2 f_0}{dx^2} + \nu_0(\varepsilon) \frac{df_0}{dx} + \varepsilon \nu_1(\varepsilon) \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \nu_1(\varepsilon) \frac{df_1}{dx} + \dots = 2 \\ \nu_0(\varepsilon) f_0(0) + \nu_1(\varepsilon) f_1(0) = 0 \\ \nu_0(\varepsilon) f_0(1) + \nu_1(\varepsilon) f_1(1) = 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

On obtient, à l'ordre dominant, en tenant compte des différents ordres de grandeurs :

$$\begin{cases} \nu_0(\varepsilon) \frac{df_0}{dx} = 2 \\ \nu_0(\varepsilon) f_0(0) = 0 \\ \nu_0(\varepsilon) f_0(1) = 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

On voit donc que $\nu_0(\varepsilon)$ est d'ordre unité, on choisit $\nu_0(\varepsilon) = 1$. On obtient alors $f_0(x) = 2x + b$, avec b une constante à déterminer. On constate que on ne peut déterminer la constante b avec les deux conditions aux limites que si on a un second membre égale à 1 au lieu de 2. On conclut que on ne peut pas trouver un développement uniformément valable sur tout l'intervalle $[0; 1]$.

Ceci signifie qu'il existe une zone dans l'intervalle $[0; 1]$, autour de laquelle $\nu_0(\varepsilon) \frac{df_0}{dx}$ n'est plus le terme dominant : c'est la couche limite. Dans cette zone, le terme $\varepsilon \nu_0(\varepsilon) \frac{d^2 f_0}{dx^2}$ ne peut plus être négligé.

On note Ω_L et Ω_P respectivement les domaines lointain et proche, comme le montre la figure (2.3).

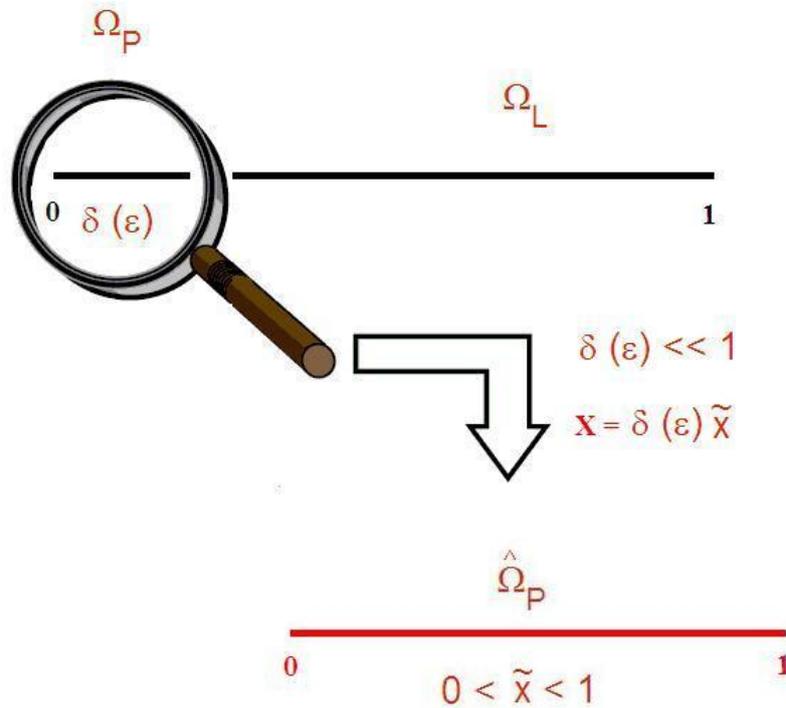


FIG. 2.3 – Les différentes zones

Dans Ω_L , la solution est donnée par :

$$f(x, \varepsilon) = f_0(x) = 2x - 1 \quad (2.14)$$

Nous allons nous placer dans Ω_P , zone très proche de $x = 0$. Afin d'étudier le problème, nous allons faire un changement d'échelle pour "zoomer" cette région, on pose : $x = \delta(\varepsilon) \tilde{x}$.

$\delta(\varepsilon) \ll 1$ est la largeur de Ω_P et \tilde{x} est d'ordre unité. Dans Ω_P , la solution est cherchée sous la forme d'un second développement asymptotique. Pour faire la différence avec l'ancien développement asymptotique, on note \tilde{f} la solution dans Ω_P :

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \varepsilon) = \eta_0(\varepsilon) \tilde{f}_0(\tilde{x}) + \eta_1(\varepsilon) \tilde{f}_1(\tilde{x}) + \dots \quad (2.15)$$

avec $\eta_0(\varepsilon) \gg \eta_1(\varepsilon)$.

On note que l'idée fondamentale à ce stage est de travailler avec les variables normalisées. On injecte dans (2.10) :

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \frac{d^2 \tilde{f}}{dx^2} + \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \frac{d\tilde{f}}{dx} = 2 \\ \tilde{f}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

On obtient, en tenant compte des différents ordres de grandeurs :

$$\begin{cases} \eta_0 \frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \frac{d^2 \tilde{f}_0}{dx^2} + \eta_0 \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \frac{d\tilde{f}_0}{dx} = 2 \\ \tilde{f}_0(0) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Le choix de $\delta(\varepsilon)$ se fait en appliquant [le principe de moindre dégénérescence](#). C'est à dire que l'on va choisir $\delta(\varepsilon)$ de façon à conserver le maximum de termes dans l'équation. On pose donc :

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \quad (2.18)$$

On a donc :

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \quad (2.19)$$

À l'ordre dominant, on doit résoudre :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{f}_0}{dx^2} + \frac{d\tilde{f}_0}{dx} = 0 \\ \tilde{f}_0(0) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

La solution dans Ω_P est donc

$$\eta_0 \tilde{f}_0 = \eta_0 \alpha (1 - \exp(-\tilde{x})) \quad (2.21)$$

Où α est une constante à déterminer.

2.2.1 Le raccord

Il faut maintenant écrire que quelqu'un se trouvant dans la région Ω_P et regardant vers Ω_L , aperçoit la même chose que quelqu'un regardant de la part de la région Ω_L vers Ω_P : c'est la règle de raccord. On définit ξ la borne supérieure de la zone de raccord telle que :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi / \varepsilon &= +\infty \\ \varepsilon &\ll \xi \ll 1 \end{aligned}$$

et on définit :

$$\Omega_J = \{x \in [0; 1] / \varepsilon \leq x \leq \xi\} \quad (2.22)$$

Dans la région Ω_J , on suppose que les deux profils sont valables. Mais vu que on manipule des variables qui n'ont pas la même échelle, il faut utiliser une transformation particulière pour "zoomer" cette zone.

On fait le changement de variable suivant

$$x = \xi \hat{x} \quad (2.23)$$

Les solutions approchées données par (2.14) et (2.21) réécrites en variable \hat{x} doivent coïncider :

$$f(\hat{x}) = f_0(\hat{x}) = 2\xi \hat{x} - 1 \quad (2.24)$$

$$\eta_0 \tilde{f}_0(\hat{x}) = \eta_0 \alpha (1 - \exp(-\frac{\xi}{\varepsilon} \hat{x})) \quad (2.25)$$

Dans la région intermédiaire Ω_J , on a à l'ordre dominant :

$$f(\hat{x}) \approx -1 \quad (2.26)$$

$$\eta_0 \tilde{f}_0(\hat{x}) \approx \eta_0 \alpha \quad (2.27)$$

On conclut que η_0 d'ordre unité et

$$\alpha = -1 \quad (2.28)$$

Ceci peut être interprété autrement : Dans le domaine Ω_J , on coïncide $f_0(x)$ et $\eta_0 \tilde{f}_0(\tilde{x})$ à proximité de ξ pour ε assez petit. Ce qui se traduit par :

$$\lim_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} \eta_0 \tilde{f}_0(\tilde{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) \quad (2.29)$$

La solution exacte du problème initial (2.10) est :

$$f(x) = -\frac{1 - \exp(-\frac{x}{\varepsilon})}{1 - \exp(-\frac{1}{\varepsilon})} + 2x \quad (2.30)$$

Pour voir la validité des solutions approchées qu'on vient de construire, on compare sur le même graphe la solution exacte à celle approchée. On prend $\varepsilon = 10^{-2}$ et on affiche les résultats dans les figures (2.4) et (2.5).

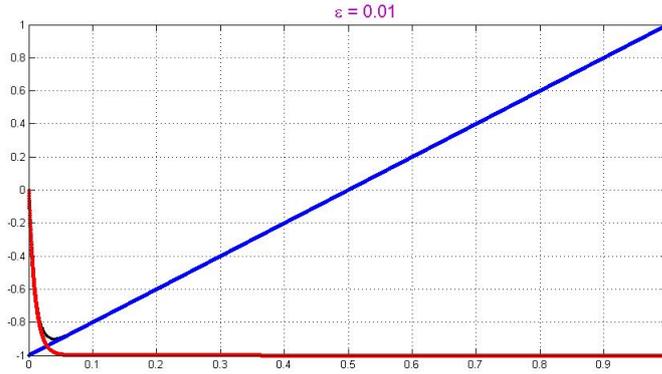


FIG. 2.4 – Solution exacte et solution approchée

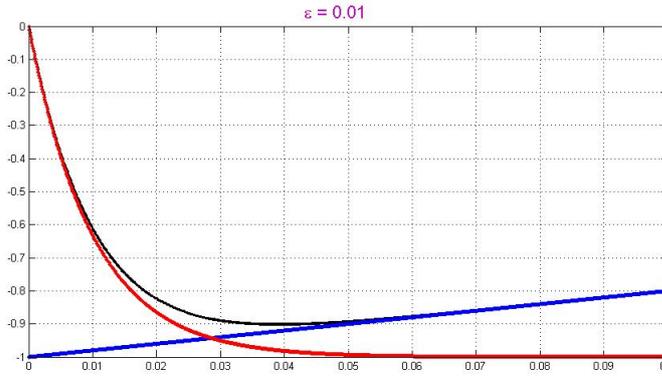


FIG. 2.5 – Zoom sur la zone du raccord

2.3 Raccord du champ vertical de la vitesse

Pour la composante $w(x, z, t)$ de la vitesse, le raccord est immédiat. On a les deux profils :

1. Dans Ω_F , on a :

$$w_0 = \frac{1}{2}z^2 \left[\psi_{0xx} \left(Y_0(x, t) - \frac{1}{3}z \right) - Y_{0x}(S - \psi_{0x}(x, t)) \right] \quad (2.31)$$

2. Dans Ω_{pp} , on a :

$$w_0(x, z, t) = w_0(x, h_0(x, t), t) + u_{0x}(x, t) [h_0(x, t) - z] \quad (2.32)$$

On fait tendre $z \rightarrow Y_0(x, t)$ dans les deux profils et on superpose les limites. On conclut que :

$$\begin{aligned} w_0(x, h_0(x, t), t) &= -u_{0x}(x, t) [h_0(x, t) Y_0(x, t)] \\ &\quad - \frac{1}{2}Y_0(x, t)^2 \left[Y_{0x}(x, t) (S - \psi_{0x}(x, t)) - \frac{2}{3}Y_0(x, t) \psi_{0xx}(x, t) \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dans toute la suite de ce chapitre, lorsqu'on parle du raccord de la solution en vitesse, il s'agit évidemment du champ horizontal.

2.4 Raccord de la vitesse horizontale et reconstruction du champ solution

Dans cette partie, on va déterminer le profil de la solution approchée en vitesse de manière plus rigoureuse. On va s'intéresser à l'existence d'une couche limite autour de la surface de séparation entre Ω_F et Ω_{pp} et on va supposer qu'on ne connaît ni l'épaisseur de cette couche, ni la nature du développement asymptotique en ε dans cette couche.

On définit la couche limite comme indiqué dans la figure (2.6). C'est une zone centrée autour de la surface $z = Y_0$, de largeur $\delta(\varepsilon) \ll 1$. Afin d'étudier le problème, nous allons faire un changement d'échelle afin de "zoomer" cette région. On pose :

$$\tilde{z} = \frac{z - Y_0(x, t)}{\delta(\varepsilon)} \quad (2.34)$$

Soit $\tilde{u}(x, z, t)$ la solution dans ce domaine qu'on appelle Ω_J .

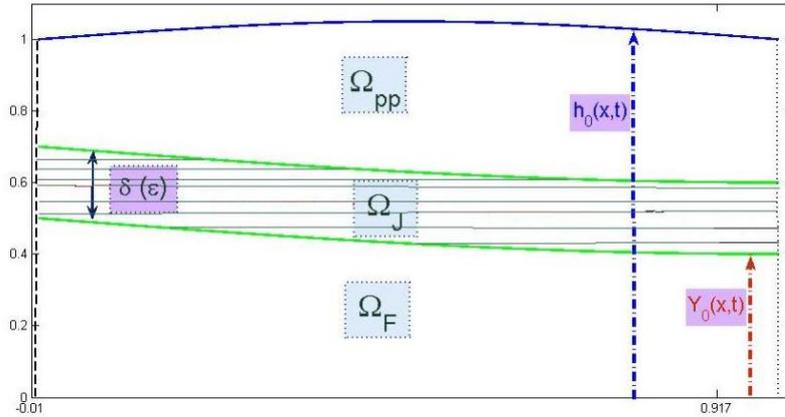


FIG. 2.6 – Représentation de la couche limite

Le profil général de la vitesse sera cherché sous la forme du développement asymptotique suivant :

$$\tilde{u}(\tilde{z}, \varepsilon) = u_0(x, Y_0(x, t), t) + \eta_1(\varepsilon)\tilde{u}_1(x, \tilde{z}, t) + \dots \quad (2.35)$$

$$1 \gg \eta_1(\varepsilon)$$

On note que on garde le terme principal égale à $u_0(x, Y_0, t)$, ceci est fortement imposé par l'expression de la solution de vitesse dans Ω_F et Ω_{pp} .

On a :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \quad (2.36)$$

On aura, à l'ordre dominant,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\eta(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{z}} \quad (2.37)$$

D'après (1.16),

$$\tau_{xz} = \left(1 + \frac{B}{E}\right) (u_z + \varepsilon^2 w_x) \quad (2.38)$$

avec

$$E = \varepsilon \dot{\gamma} = \sqrt{(u_z + \varepsilon^2 w_x)^2 + 4u_x^2 \varepsilon^2} \quad (2.39)$$

On aura donc :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{1}{\delta(\varepsilon)} \tilde{u}_{\tilde{z}} + \varepsilon^2 w_x\right)^2 + 4\tilde{u}_x^2 \varepsilon^2} \quad (2.40)$$

ou encore

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\eta_1(\varepsilon)}{\varepsilon \delta(\varepsilon)} \tilde{u}_{1\tilde{z}} + \varepsilon w_x\right)^2 + 4\tilde{u}_x^2} \quad (2.41)$$

On note $\tilde{\tau}_{x\tilde{z}} = \tau_{xz}$,

$$\tilde{\tau}_{x\tilde{z}} = \left(1 + \frac{B}{\varepsilon \dot{\gamma}}\right) \left(\frac{\eta_1(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} \tilde{u}_{1\tilde{z}} + \varepsilon w_x\right) \quad (2.42)$$

D'après le principe de la moindre dégénérescence présenté dans la section (1.2), on choisit $\delta(\varepsilon)$ et $\eta_1(\varepsilon)$ de façon à conserver le maximum de termes dans le système à résoudre. Un bon choix revient à prendre :

$$\begin{aligned} \eta_1(\varepsilon)/\varepsilon \delta(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \eta_1(\varepsilon)/\delta(\varepsilon) &= \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

On prend :

$$\begin{aligned} \eta_1(\varepsilon) &= \varepsilon^3 \\ \delta(\varepsilon) &= \varepsilon \end{aligned} \quad (2.44)$$

D'après (2.41),

$$\dot{\gamma} = 2 |\tilde{u}_{0x}(x, Y_0(x, t), t)| \quad (2.45)$$

On injecte dans (2.42) et on tronque à l'ordre 1 en ε ,

$$\tilde{\tau}_{x\tilde{z}} = \frac{\varepsilon B}{2|\tilde{u}_{0x}(x, Y_0(x, t), t)|} [\tilde{u}_{1\tilde{z}}(x, \tilde{z}, t) + w_x(x, \tilde{z}, t)] \quad (2.46)$$

Les équations des moments (A.14) impliquent, en utilisant l'expression de $Y_0(x, t)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{1x\tilde{z}} &= (h_0(x, t) - Y_0(x, t))(S - h_{0x}(x, t)) \\ &= B\end{aligned}\tag{2.47}$$

Donc

$$\varepsilon \tilde{\tau}_{1x\tilde{z}} = \varepsilon B$$

On conclut, en égalisant les termes d'ordre 1 en ε que :

$$\frac{B}{2|\tilde{u}_{0x}(x, Y_0(x, t), t)|} [\tilde{u}_{1\tilde{z}}(x, \tilde{z}, t) + w_x(x, \tilde{z}, t)] = B\tag{2.48}$$

L'expression de $w_x(x, \tilde{z}, t)$ sont déduites de l'équations (2.5). On a :

$$w(x, t) \approx w_0(x, h_0(x, t), t) + u_{0x}(x, Y_0(x, t), t) \frac{B}{S - h_{0x}(x, t)}$$

$w_0(x, h_0(x, t), t)$ est donnée par (2.33).

Pour simplifier les écritures, on note :

$$A(x, t) = 2|\tilde{u}_{0x}(x, Y_0(x, t), t)| - w_x(x, t)\tag{2.50}$$

Finalement, on utilise l'équation (2.48) pour déduire :

$$\tilde{u}_1(x, \tilde{z}, t) = A(x, t)\tilde{z} + \alpha\tag{2.51}$$

♣ **Conclusion :**

La solution approchée sera donnée dans Ω_J par :

$$\tilde{u}(x, \tilde{z}, t) = u_0(x, Y_0(x, t), t) + \varepsilon^3 [A(x, t)\tilde{z} + \alpha]\tag{2.52}$$

Le paramètre α est une constante d'intégration, elle sera déterminée en écrivant la continuité au niveau de $\tilde{z} = 0$:

$$\tilde{u}(x, \tilde{z} = 0^+, t) = \tilde{u}(x, \tilde{z} = 0^-, t)$$

On conclu que :

$$\alpha = 0$$

L'étape suivante consiste à déterminer le paramètre $u_1(x, h_0(x, t), t)$ afin de construire la solution approchée.

✓ **Raccord au niveau de la borne supérieure de Ω_J :**

On coïncide $u^{pp}(x, z, t)$ et $\tilde{u}(x, \tilde{z}, t)$ au niveau de la borne supérieure de Ω_J . On veut que l'approximation soit valable pour tout ε petit. Leurs expressions sont données respectivement par (2.7) et (2.52).

On écrit donc :

$$\lim_{\tilde{z} \rightarrow 1} \tilde{u}(x, \tilde{z}, t) = \lim_{z \rightarrow Y_0 + \epsilon} u^{pp}(x, z, t) \quad (2.53)$$

qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} \epsilon^2 A(x, t) &= \lim_{z \rightarrow Y_0 + \epsilon} u_1(x, h_0(x, t), t) \\ &= -\frac{2B}{S - h_{0x}(x, t)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(S - h_{0x}(x, t))^2}{B^2} (h_0(x, t) - z)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

Comme on cherche une relation qui est vraie quel que soit la valeur de ϵ on conclut que :

$$\boxed{u_1(x, h_0(x, t), t) = \frac{2B}{S - h_{0x}(x, t)}} \quad (2.55)$$

2.5 Conclusion

Le travail qui a été présenté dans ce chapitre nous a permis de retrouver tous les paramètres inconnus et de construire par la suite un profil approché de la solution dans tout le domaine. On résume par la suite les résultats retrouvés et on donne une approximation globale des deux composantes de la vitesse en utilisant des fonctions de troncatures qui seront définies par la suite.

2.5.1 Résumé de la solution approchée

On rappelle les notations utilisées pour les différents domaines (voir figure 2.6) :

☞

$$\Omega(t) = \{(x, z) \in \mathcal{R}^2 / 0 \leq z < h_0(x, t)\}$$

☞

$$\Omega_F(t) = \{(x, z) \in \Omega(t) / 0 \leq z < Y_0(x, t) - \epsilon/2\}$$

☞

$$\Omega_J(t) = \{(x, z) \in \Omega(t) / Y_0(x, t) \leq z < Y_0(x, t) + \epsilon\}$$

☞

$$\Omega_{pp}(t) = \{(x, z) \in \Omega(t) / Y_0(x, t) + \epsilon/2 \leq z \leq h_0(x, t)\}$$

Les deux composantes de la vitesse sont notées respectivement $u(x, z, t)$ et $w(x, z, t)$. Pour la composante verticale $w(x, z, t)$, on a (voir (2.4), (2.5)) :

① Si $z \leq Y_0(x, t)$,

$$w_0(x, z, t) \approx \frac{1}{2}z^2 \left[\psi_{0xx} \left(Y_0(x, t) - \frac{1}{3}z \right) - Y_{0x} (S - \psi_{0x}(x, t)) \right] \quad (2.56)$$

② Si $z \geq Y_0(x, t)$,

$$w_0(x, z, t) \approx \alpha + u_{0x}(x, t) [h_0(x, t) - z] \quad (2.57)$$

α est donnée par (2.33) :

$$\begin{aligned} \alpha &= -u_{0x}(x, t) [h_0(x, t) Y_0(x, t)] \\ &\quad - \frac{1}{2}Y_0(x, t)^2 [Y_{0x}(x, t) (S - \psi_{0x}(x, t)) - \frac{2}{3}Y_0(x, t) \psi_{0xx}(x, t)] \end{aligned}$$

La composante horizontale $u(x, z, t)$ est donnée par : (voir (2.6), (2.52), (2.7))

① Si $z \in \Omega_F$,

$$u^F(x, z, t) \approx u_0(x, z, t) \quad (2.58)$$

② Si $z \in \Omega_J$,

$$\tilde{u}(x, \frac{z-Y_0}{\varepsilon}, t) = u_0(x, Y_0(x, t), t) + \varepsilon^3 [A(x, t) \frac{z-Y_0}{\varepsilon}]$$

③ Si $z \in \Omega_{pp}$,

$$u^{pp}(x, z, t) \approx u_0(x, Y_0(x, t), t) + \varepsilon u_1(x, z, t) \quad (2.59)$$

$u_0(x, z, t)$ est donnée par (2.8) :

$$u_0(x, z, t) \approx z \left(Y_0(x, t) - \frac{1}{2}z \right) (S - \psi_{0x}(x, t))$$

$u_1(x, z, t)$ est donnée par (2.9) et (2.55) :

$$u_1(x, z, t) \approx \frac{2B}{S-h_{0x}(x,t)} \sqrt{1 - \frac{(S-h_{0x}(x,t))^2}{B^2}} (h_0(x, t) - z)^2$$

2.5.2 Approximation globale de la solution

L'approche des développements asymptotiques raccordés consiste à construire plusieurs types de développements. Chacun est valide localement et ils sont raccordés dans des régions intermédiaires. Ces développements sont composés de deux types de termes : les premiers interviennent en la variable standard z et les seconds en la variable dilatée $\frac{z-Y_0(x,t)}{\varepsilon}$. Les termes sont superposés à l'aide de fonctions de troncatures \mathcal{X} afin d'obtenir une approximation globale de la solution.

Soit \mathcal{X} une fonction de troncature régulière définie sur \mathbb{R}^+ définie de la manière suivante : (voir figure 2.7)

☞ si $z \leq 1$,

$$\mathcal{X}(z) = 0$$

☞ si $z \geq 2$,

$$\mathcal{X}(z) = 1$$

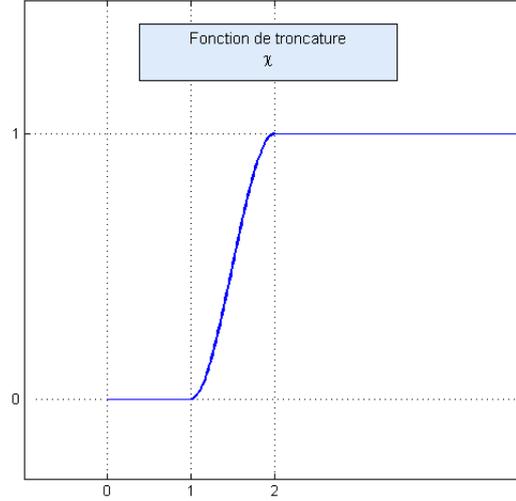


FIG. 2.7 – La fonction de troncature \mathcal{X}

Soit \mathcal{Y} la fonction de troncature définie sur $[0, h_0(x, t)]$, elle prend pour valeur 1 si $z \leq Y_0(x, t)$ et 0 sinon.

Les termes donnés par les différents développements asymptotiques seront superposés, ceci aboutit à l'approximation globale de la solution suivante :

$$\begin{aligned}
 u^\varepsilon(x, z, t) &= \mathcal{Y}(z) u^F(x, z, t) + \mathcal{X}\left(\frac{z - Y_0(x, t)}{\varepsilon}\right) u^{pp}(x, z, t) \\
 &+ \left[1 - \mathcal{Y}(z) - \mathcal{X}\left(\frac{z - Y_0(x, t)}{\varepsilon}\right)\right] \tilde{u}\left(x, \frac{z - Y_0}{\varepsilon}, t\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.60}$$

Suite à ce chapitre, on a finalisé le travail qui a été abordé par Balmforth et Craster [2] en se basant sur la méthode des développements asymptotiques raccordés.

Néanmoins, ce travail n'est pas accompli dans la mesure où on est amené à trouver une estimation optimale du reste $R(\varepsilon)$:

$$u(x, z, t) = u^\varepsilon(x, z, t) + R(\varepsilon)$$

On note aussi que ce travail peut être effectué par la technique de développement asymptotique multi-échelle. Elle consiste à construire une approximation valable globalement de $u(x, z, t)$ dans $\Omega(t)$, composée aussi de deux types de termes : les premiers interviennent en la variable standard z et les seconds en la variable dilatée $\frac{z - Y_0(x, t)}{\varepsilon}$. Ces termes seront de même superposés à l'aide de fonctions de troncatures.

Ces deux approches sont expliquées sur un problème de Laplace-Dirichlet dans un domaine polygonal qui présente une perturbation de taille ε en l'un de ses sommets dans les travaux de G.Vial et S.Tordeux (cf. [12]-[13]-[15]-[14] pour plus de détails).

Chapitre 3

Etude du modèle cinématique

Sommaire

3.1	Méthode de résolution numérique	28
3.2	Problème à résoudre	28
3.2.1	Présentation du problème physique	28
3.2.2	Système d'équations	29
3.3	Discrétisation par la méthode des différences finies	29
3.3.1	Discrétisation temporaire	29
3.3.2	Discrétisation spatiale	30
3.4	Simulations numériques	32
3.4.1	Estimation d'énergie	32
3.4.2	Conservation du volume	33
3.4.3	Résultats numériques	34

3.1 Méthode de résolution numérique

Les simulations numériques sont au centre d'intérêt d'un grand nombre de chercheurs ces dernières années. Ceci est dû principalement aux coûts des expériences. Ces coûts élevés ainsi que l'augmentation des puissances des ordinateurs, ont motivé ces dernières années un grand nombre de tentatives de simulations directes des écoulements fluide particule. Néanmoins, ces approches de simulations doivent être efficaces et aboutir aux résultats physiques attendus afin de remplacer les expériences. Ceci est en relation notamment avec le modèle mathématique du problème physique à résoudre ainsi que l'outil de résolution numérique adopté.

Les équations différentielles qui décrivent le phénomène physique peuvent être résolues analytiquement seulement dans des cas très limités souvent pour des géométries adaptées. Des cas plus complexes demandent des approches numériques. Parmi lesquelles, on peut citer la méthode des volumes finis (FVM), la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des différences finies (FDM) : Cette dernière va intervenir dans la résolution numérique du modèles réduit traités.

3.2 Problème à résoudre

3.2.1 Présentation du problème physique

On considère un fluide de Bingham, initialement au repos dans un réservoir ou un barrage sur un plan parfaitement horizontale. La rupture de la frontière provoque la mise en mouvement du fluide le long d'un canal.

On note L la longueur du réservoir, H_0 la hauteur initiale du fluide et L_c la longueur du canal dans lequel se propage l'écoulement lors de la rupture du réservoir (voir figure 3.1).

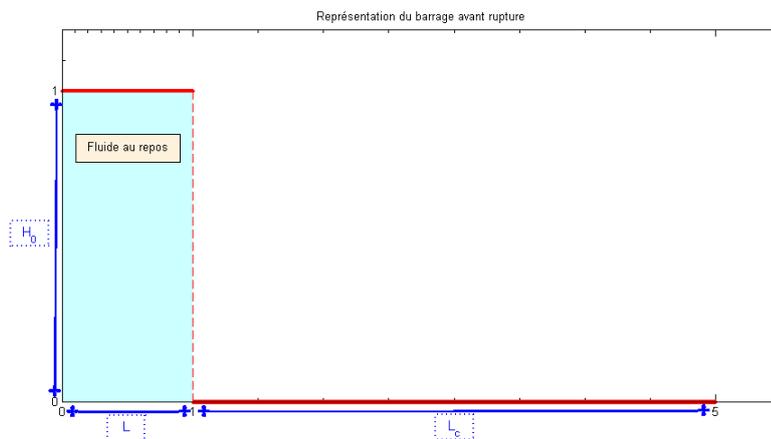


FIG. 3.1 – Représentation du barrage avant la rupture

3.2.2 Système d'équations

Le modèle à résoudre est donné par l'équation d'évolution (A.41) démontrée en Annexe A (cf [2]). Il est constitué par les équations ci-dessous. On rappelle que ces équations sont adimensionnelles, il est donc impératif de revenir aux variables dimensionnelles en cas de comparaison avec tout résultat physique.

Le réservoir repose sur un plan horizontale donc $S = \tan \theta / \varepsilon = 0$ et :

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

– Si $\left| h \frac{\partial h}{\partial x} \right| \geq B$;

$$Q = \frac{1}{6} \frac{\partial h}{\partial x} Y_0^2 (3h - Y_0) \quad (3.2)$$

et

$$Y_0 = h - \frac{B}{\left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|} \quad (3.3)$$

On pose :

$$k \left(h, \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{1}{6} Y_0^2 (3h - Y_0) \quad (3.4)$$

– Sinon ;

$$Q = 0 \quad (3.5)$$

Concernant les conditions au bord, on choisit :

1. Condition de Neuman en aval :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(L + L_c, t) = 0 \quad (3.6)$$

2. Condition de Neuman en amont du réservoir :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (3.7)$$

Pour la condition initiale, elle a la forme présentée par la figure 3.1.

3.3 Discrétisation par la méthode des différences finies

3.3.1 Discrétisation temporaire

On traite un problème évolutif, On a besoin d'une discrétisation temporaire. On utilise le pas de temps noté Δt . Pour des raisons de consistances du schéma, on choisit $\Delta t \ll 1$.

Pour des raisons de stabilité, on utilise un schéma semi-implicite, ceci est indispensable dans la mesure où il permet d'étudier des phénomènes de durées importantes avec des pas de temps relativement élevés.

On note :

$$\begin{aligned} t^n &= t^0 + n\Delta t \\ h^n(x) &= h(x, t^n) \end{aligned} \quad (3.8)$$

On discrétise l'équation (3.1) de la manière suivante :

$$\frac{h^{n+1}}{\Delta t} - \frac{d}{dx} \left(k \left(h^n, \frac{dh^n}{dx} \right) \frac{dh^{n+1}}{dx} \right) = \frac{h^n}{\Delta t} \quad (3.9)$$

3.3.2 Discrétisation spatiale

On commence par discrétiser l'intervalle d'étude $[0, L + L_c]$ en $N + 2$ points de discrétisation et on s'intéresse à l'élément $i \in \{1, \dots, n\}$. Soit Δx le pas de discrétisation spatial et $x_{i+1/2}$ le milieu du segment $[x_i, x_{i+1}]$.

On procède à la discrétisation suivante :

$\forall 1 \leq i \leq N - 1,$

$$\frac{dh}{dx} (t^n, x_{i+1/2}) \approx \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x} \quad (3.10)$$

$$h(t^n, x_{i+1/2}) \approx \frac{h_{i+1}^n + h_i^n}{2} \quad (3.11)$$

1. Si $\left| \left[\frac{h_{i+1}^n + h_i^n}{2} \right] \left[\frac{(h_x)_{i+1}^n - (h_x)_i^n}{\Delta x} \right] \right| < B;$

$$k_{i+1/2}^n \approx 0 \quad (3.12)$$

2. Sinon,

$$Y_{i+1/2}^n \approx h_{i+1/2}^n - \frac{B}{\left| (h_x)_{i+1/2}^n \right|} \quad (3.13)$$

$$k_{i+1/2}^n \approx 1/6 (Y_{i+1/2}^n)^2 (3h_{i+1/2}^n - Y_{i+1/2}^n) \quad (3.14)$$

Compte tenu de la condition de Neuman sur le bord en aval (3.6), on note :

$$k_{N+1/2}^n \approx 0 \quad (3.15)$$

De manière analogue, $\forall 2 \leq i \leq N,$

$$\frac{dh}{dx} (t^n, x_{i-1/2}) \approx \frac{h_i^n - h_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (3.16)$$

$$h(t^n, x_{i-1/2}) \approx \frac{h_i^n + h_{i-1}^n}{2} \quad (3.17)$$

$$1. \text{ Si } \left| \left[\frac{h_i^n + h_{i-1}^n}{2} \right] \left[\frac{(h_x)_i^n - (h_x)_{i-1}^n}{\Delta x} \right] \right| < B;$$

$$k_{i-1/2}^n \approx 0 \quad (3.18)$$

2. Sinon,

$$Y_{i-1/2}^n \approx h_{i-1/2}^n - \frac{B}{|(h_x)_{i-1/2}^n|} \quad (3.19)$$

$$k_{i-1/2}^n \approx 1/6 (Y_{i-1/2}^n)^2 (3h_{i-1/2}^n - Y_{i-1/2}^n) \quad (3.20)$$

Compte tenu de la condition de Neuman sur le bord en amont (3.7), on note :

$$k_{1-1/2}^n \approx 0 \quad (3.21)$$

Finalement,

$$Q_{i+1/2}^{n+1} \approx k_{i+1/2}^n \left(\frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x} \right) \quad (3.22)$$

$$Q_{i-1/2}^{n+1} \approx k_{i-1/2}^n \left(\frac{h_i^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \right) \quad (3.23)$$

L'équation (3.9) s'écrit :

$$\frac{h_i^{n+1}}{\Delta t} - \left[\frac{Q_{i+1/2}^{n+1} - Q_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} \right] = \frac{h_i^n}{\Delta t} \quad (3.24)$$

Ceci se traduit pour la i^{me} composante par :

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} h_i^{n+1} - k_{i+1/2}^n h_{i+1}^{n+1} + k_{i+1/2}^n h_i^{n+1} + k_{i-1/2}^n h_i^{n+1} - k_{i-1/2}^n h_{i-1}^{n+1} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} h_i^n \quad (3.25)$$

Sous la forme matricielle, il s'agit de résoudre un système linéaire qui présente une matrice tridiagonale à inverser. Il sera noté comme suit :

$$\begin{pmatrix} a(1) & b(1) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ c(1) & a(2) & b(2) & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & c(2) & a(3) & b(3) & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & c(N-2) & a(N-1) & b(N-1) \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & 0 & c(N-1) & a(N) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ h_i^{n+1} \\ \vdots \\ h_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^n \\ \vdots \\ \vdots \\ h_i^n \\ \vdots \\ h_N^n \end{pmatrix}$$

On a $\forall 1 \leq i \leq N$

$$\begin{cases} a(i) = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} + k_{i+1/2}^n + k_{i-1/2}^n \\ b(i) = -k_{i+1/2}^n \\ c(i) = -k_{i-1/2}^n \end{cases}$$

3.4 Simulations numériques

Dans les différentes simulations effectuées dans cette partie, on a choisi $N + 1 = 640$ points d'espace donc un pas de discrétisation spatial $\Delta x = 1.25 \times 10^{-2}$. On prend $L = 1$ et $L_c = 7$.

On a choisi un schéma semi-implicite, ceci nous permet de choisir des pas de temps relativement élevés. Néanmoins, on s'aperçoit que l'écoulement est rapide notamment pour les instants initiaux. Pour cette raison, on a choisit un pas de temps $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ pour $t < 100$. Au delà de ça, on prend $\Delta t = 10^{-3}$.

3.4.1 Estimation d'énergie

On s'intéresse pour des raisons de simplicité au cas $S = 0$ et on considère des conditions de Dirichlet homogènes sur les bords. On rappelle aussi que $S - \frac{\partial h}{\partial x} \geq 0$. On a :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{6} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.26)$$

– Si $-h \frac{\partial h}{\partial x} \geq B$;

$$Q = - \left(h + \frac{B}{h_x} \right)^2 \left(2h - \frac{B}{h_x} \right) \frac{\partial h}{\partial x}$$

– Sinon,

$$Q = 0$$

Le domaine d'intégration est $\Omega =]0, L + L_c[$.

On s'intéresse à l'équation (3.26) pour $-h \frac{\partial h}{\partial x} \geq B$. On multiplie cette équation par h et on intègre sur Ω , on a respectivement :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} (x, t) h(x, t) dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} h^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h^2(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} (x, t) h(x, t) dx &= [Q(x, t) h(x, t)]_0^{+\infty} - \int_{\Omega} Q(x, t) \frac{\partial h}{\partial x} dx \end{aligned}$$

En exploitant les conditions aux bords, on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} (x, t) dx = \int_{\Omega} \left(h + \frac{B}{h_x} \right)^2 \left(2h - \frac{B}{h_x} \right) h_x^2 dx = \int_{\Omega} (B + hh_x)^2 \left(2h - \frac{B}{h_x} \right) dx$$

L'équation (3.26) donne alors :

$$3 \frac{d}{dt} \|h^2(t)\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} h (B + hh_x)^2 \left(2 + \frac{B}{-hh_x}\right) dx = 0 \quad (3.27)$$

Or,

$$-hh_x \geq B$$

Donc

$$2 \leq \left(2 + \frac{B}{-hh_x}\right) \leq 3$$

Une minorisation du premier terme de l'équation (3.27) implique :

$$3 \frac{d}{dt} \|h^2(t)\|_{L^2(\Omega)} + 2 \int_{\Omega} h (B + hh_x)^2 dx \leq 3 \frac{d}{dt} \|h^2(t)\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} h (B + hh_x)^2 \left(2 + \frac{B}{-hh_x}\right) dx = 0 \quad (3.28)$$

De même,

$$0 \leq \left(1 - \frac{B}{-hh_x}\right) \leq 1$$

L'équation (3.28) implique :

$$3 \frac{d}{dt} \|h^2(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq 0 \quad (3.29)$$

Finalement,

$$\|h^2(t)\|_{L^2(\Omega)} = \text{constante}(t) \quad (3.30)$$

Le résultat obtenu lors de l'équation (3.30) reste valable dans le cas où $-hh_x < B$ dans la mesure où on a $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$. On conclut que :

$$\|h^2(t)\|_{L^2(\Omega)} = \text{constante}(t) \quad (3.31)$$

3.4.2 Conservation du volume

Le modèle initial de Bingham présenté dans le premier chapitre contient l'équation de la conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

On rappelle que le modèle traité dans ce chapitre est obtenu par approximation asymptotique du modèle de Bingham. Il est donc important de montrer que ce modèle traduit la conservation de la masse afin qu'il soit pertinent du point de vue de la physique.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{6} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t) = 0 \quad (3.32)$$

avec :

$$\text{Si } -h \frac{\partial h}{\partial x} \geq B, \quad Q(x, t) = \left\{ - \left(h + \frac{B}{h_x} \right)^2 \left(2h - \frac{B}{h_x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right\}$$

$$\text{Sinon, } Q(x, t) = 0$$

On intègre sur $\Omega = \mathcal{R}^+$ l'équation (3.32), on aura respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|h(x, t)\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} \frac{1}{6} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t) dx &= 0 \\ \frac{d}{dt} \|h(x, t)\|_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{6} [Q(x, t)]_0^{+\infty} &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

En prenant des conditions de types Dirichlet, Neumann ou mixtes, on aura

$$-h \frac{\partial h}{\partial x} = 0 < B$$

Ce qui implique que

$$Q(x, t) = 0$$

On conclut à partir de l'équation (3.33) que :

$$\frac{d}{dt} \|h(x, t)\|_{L^1(\Omega)} = 0$$

Finalement, on a la conservation du volume :

$$\|h(t)\|_{L^1(\Omega)} = \text{constante}(t) \quad (3.34)$$

De point de vue numérique, on approche le volume par la somme discrète suivante :

$$V(t^n) \approx \sum_{i=1}^N (h_{i+1/2}^n) \Delta x \quad (3.35)$$

Le volume relatif est défini comme suit :

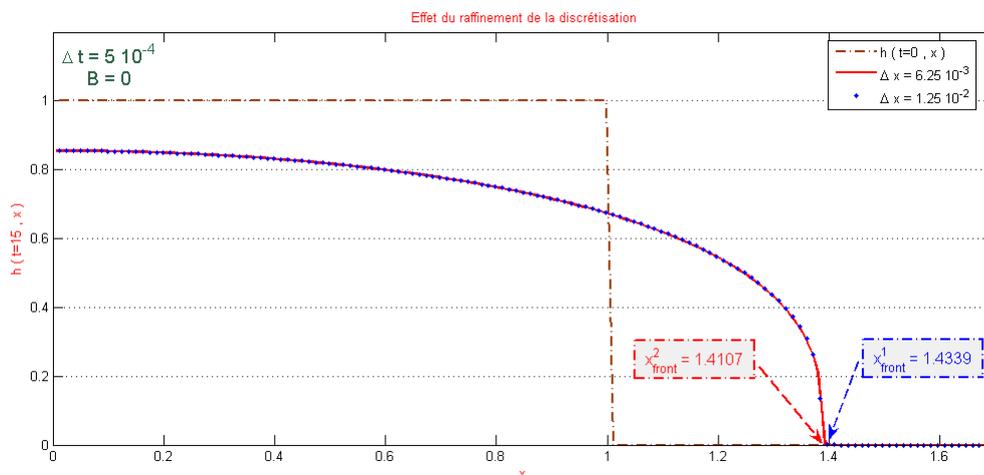
$$\frac{V(t^n) - V(t^0)}{V(t^0)} \quad (3.36)$$

3.4.3 Résultats numériques

✓ On commence par justifier le choix du pas d'espace $\Delta x = 1.25 \times 10^{-2}$. On lance deux simulations, l'une pour $\Delta x = 1.25 \times 10^{-2}$ et l'autre pour $\Delta x = 6.25 \times 10^{-3}$. On choisit $\Delta t = 510^{-4}$ et un nombre de Bingham $B = 0$, notons que c'est la valeur pour laquelle le fluide est newtonien et par conséquent, les effets viscoplastiques n'existent pas : on s'attend à avoir le maximum d'erreur possible. Les résultats sont présentés dans la figure 3.2.

Ces résultats confirment le fait que les résultats obtenus dépendent de la discrétisation utilisée mais on peut confirmer que le choix de $\Delta x = 1.25 \times 10^{-2}$ est acceptable dans la mesure où l'erreur est de l'ordre de 10^{-2} .

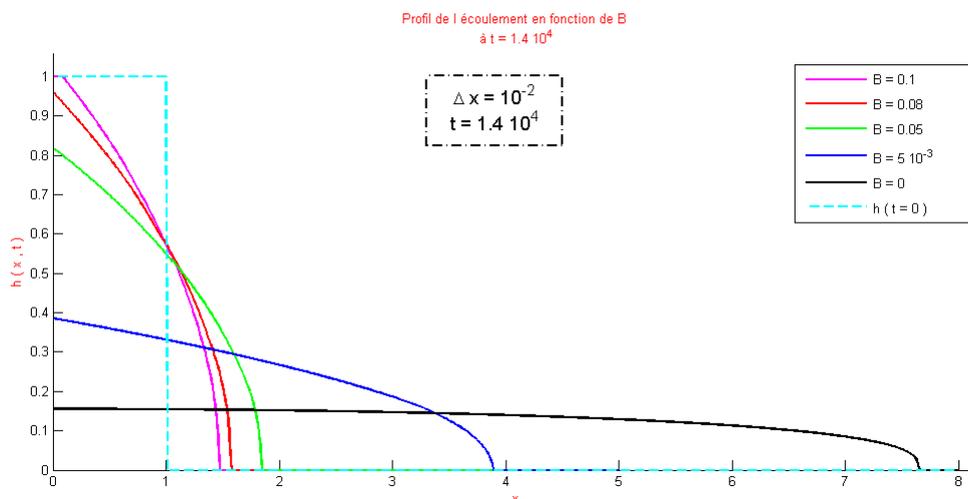
✓ On effectue une série de simulations pour différentes valeurs du nombre de Bingham allant de 0.1 à 0. Pour $B = 0.1$, le fluide est fortement viscoplastique, il bouge légèrement par rapport à son état initial avant de prendre un régime stable. Physiquement, ce fluide

FIG. 3.2 – Résultats obtenus à $t = 15$ secondes pour $B = 0$

rassemble à la pâte. Contrairement, pour $B = 0$, le fluide est newtonien et il ressemble physiquement à l'eau : il s'étale infiniment sur toute la surface de propagation. On signale que ceci ne traduit pas effectivement la réalité car on observe réellement que il s'arrête à un certain niveau mais pour une autre raison qui est d'être due aux forces capillaires dont on ne tient pas compte dans ce modèle mathématique.

Les résultats sont affichés à $t = 1.4 \times 10^4$ dans la figure 3.3 où on représente le profil de la surface libre pour les différentes valeurs de Bingham ainsi que le profil à l'instant initial.

On signale principalement que pour $B = 0.1$, $B = 0.08$ et $B = 0.05$, l'écoulement a atteint le régime stable et il ne bouge plus. Pour $B = 5 \times 10^{-3}$, on s'approche du régime stable et pour $B = 0$, le fluide est newtonien.

FIG. 3.3 – Profil de la surface libre en fonction de B à $t = 1.4 \times 10^4$

✓ On s'intéresse à $B = 0$ et on superpose l'évolution de la surface libre pour $t \leq 100$

(voir figure 3.4 ou cliquer sur [Vidéo](#)). Ceci met en évidence deux régimes : pendant le premier régime, les différentes courbes passent par le point $A_m(1, \frac{2}{3})$ et le front de l'écoulement avance rapidement. Pendant le second régime, le front avance moins rapidement et le point A_m commence à descendre avec une vitesse uniforme.

On note aussi que la valeur de $h_m = \frac{2}{3}$ est une valeur qui est retrouvée par des expériences physiques. Néanmoins, on observe une légère ascension du point $A_m(1, h_m)$ durant le premier régime (figure 3.8).

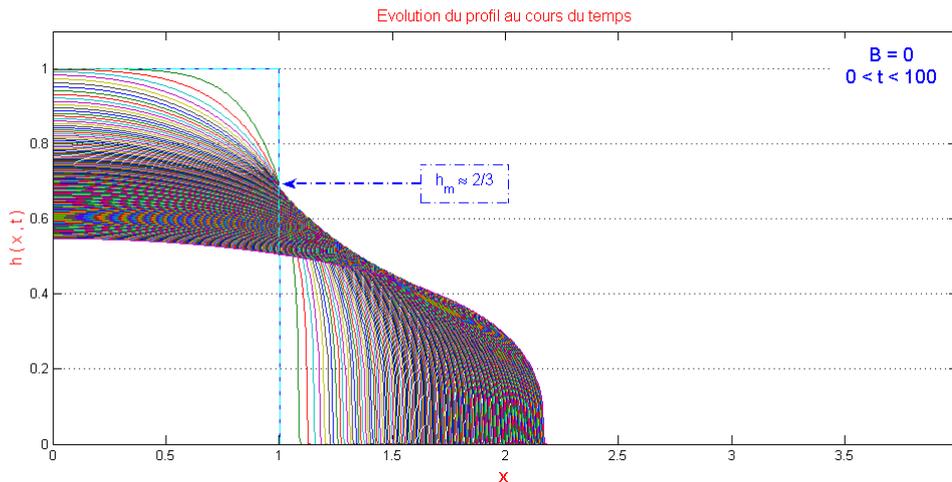


FIG. 3.4 – Évolution de la surface libre pour $B = 0$ en fonction du temps

✓ On étudie maintenant l'évolution du front de l'écoulement au cours du temps. On représente en échelle logarithmique $x_{front} - 1$ en fonction du temps pour $t \leq 1.4 \times 10^4$ pour des valeurs de Bingham allant de $B = 0$ à $B = 5 \times 10^{-3}$. Les résultats sont affichés dans la figure 3.5.

Plusieurs remarques peuvent être dégagées à partir de cette figure :

On constate que la courbe obtenue pour le fluide newtonien représente une enveloppe pour les autres courbes : chacune des autres courbes suit une branche commune avec cette courbe avant de prendre une phase intermédiaire pendant laquelle le front bougent de plus en plus faiblement et il finie par se stabiliser à un certain niveau ; c'est le régime stable qui est atteint.

On signale que plus le nombre de Bingham est élevé (en d'autre termes : plus le fluide est pâteux), plus le régime stable est atteint rapidement

✓ Des résultats qui ont été effectués lors des travaux ultérieurs ont montré que pour un fluide newtonien, le front suit lors de son évolution deux régimes, le premier se situe pendant les instants moyens et il est prallèle à une courbe en racine carrée du temps. Le second est suit pendant les temps élevés et il est égale exactement à une courbe en $y(t) = t^{1/5}$. On essaye de voir la validité de ce modèle en étudiant la courbe d'évolution du front de l'écoulement en fonction du temps pour $B = 0$.

On rappelle que ce modèle n'a pas été obtenu directement par des lois physiques mais qu'il résulte d'une approximation asymptotique du vrai modèle de Bingham présenté dans le premier chapitre de ce rapport.

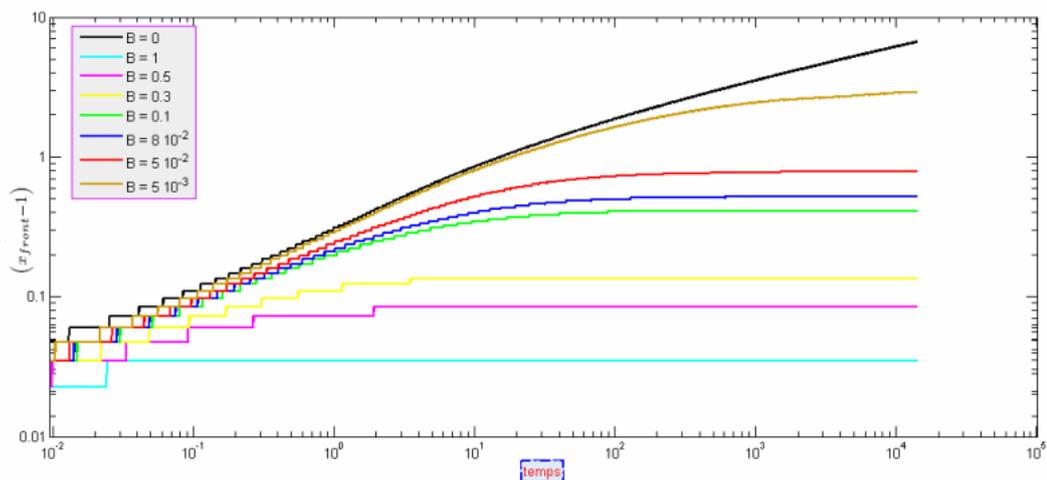
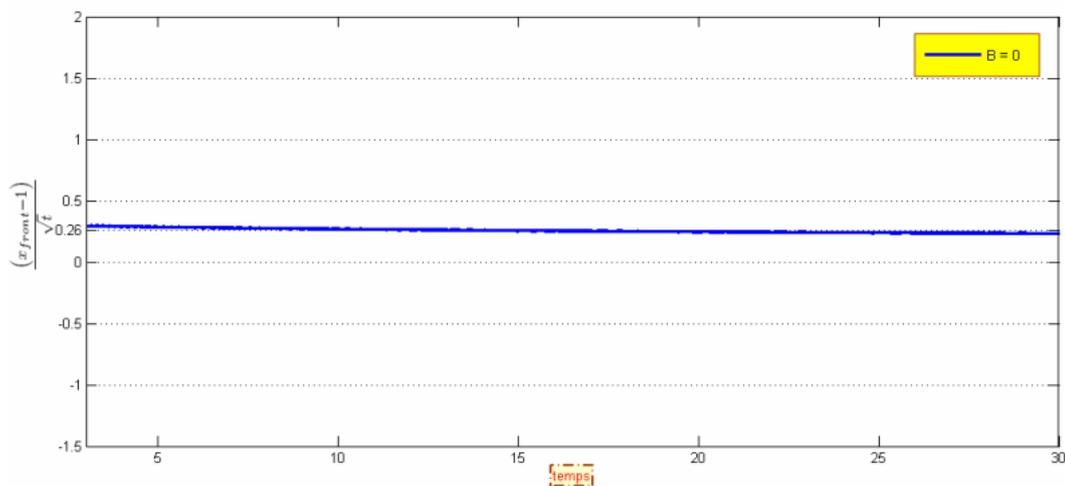


FIG. 3.5 – Évolution du front en échelle Logarithmique

On trace en fonction du temps les courbes $\frac{(x_{front}-1)}{\sqrt{t}}$ et $\frac{(x_{front}-1)}{t^{1/5}}$ respectivement pour $t \in [3, 30]$ et $t \in [3 \times 10^3, 1.4 \times 10^4]$ (cf respectivement les figures 3.6 et 3.7).

FIG. 3.6 – Évolution du front en \sqrt{t} pour les temps moyens

✓ Les figures 3.6 et 3.7 montrent que l'écoulement suit la loi d'évolution suivante :

① si $t \in [3, 30]$:

$$x_{front} - 1 = 0.26\sqrt{t}$$

② si $t \in [3 \times 10^3, 1.4 \times 10^4]$:

$$x_{front} - 1 = t^{1/5}$$

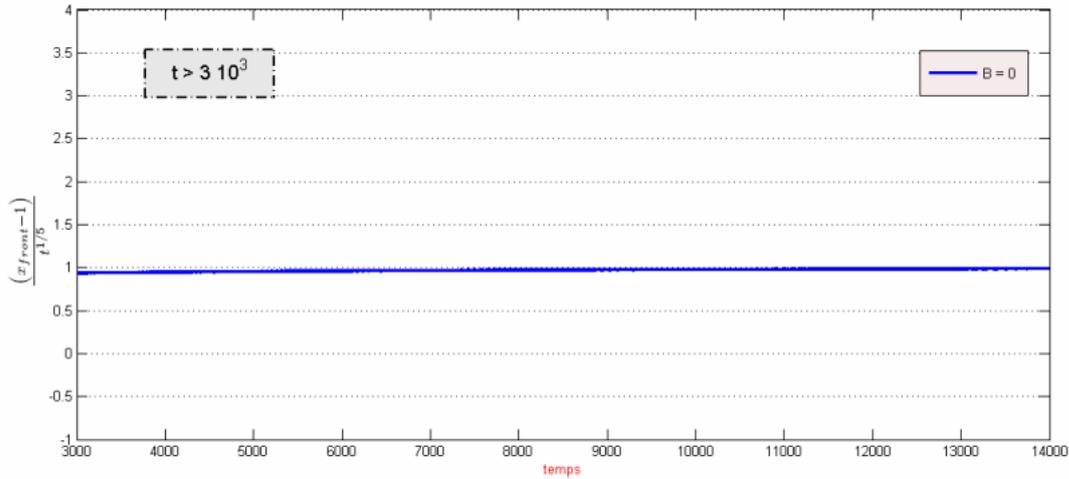


FIG. 3.7 – Évolution du front $t^{1/5}$ pour les temps élevés

C'est un résultat qui est connu en littérature et qui a été retrouvé pour ce modèle.

✓ On continue à traiter le cas $B = 0$ et on s'intéresse aux points ayant pour coordonnées respectifs $A_b(0, h_b)$, $A_m(1, h_m)$, $A_1(0.25, h_1)$, $A_2(1.5, h_2)$, $A_3(2, h_3)$, $A_4(2.5, h_4)$, $A_5(2.75, h_5)$. On suit l'évolution au cours du temps de ces points et on affiche les résultats retrouvés dans la figure 3.8.

On observe que les différentes figures présentent une asymptote commune qui est suivie pour les temps élevés. En suivant l'évolution du point A_m , on confirme la remarque qu'on a signalé suite à la figure 3.4 : on voit bien que ce point ne commence à bouger qu'à partir d'un certain instant égale à $t = 2$ mais en zoomant ce palier, on observe que effectivement, il y a une légère ascension que suit ce point avant de commencer à descendre.

Pour les points situés au delà de $x = 1$, ils commencent à monter à partir d'un certain instant pendant un intervalle de temps donné avant de commencer à descendre et ils finissent par suivre l'asymptote commune pour un temps assez élevé. Ce phénomène est bien observé pour le point A_2 .

✓ Le modèle qu'on résout est tiré de celui de Bingham présenté dans le premier chapitre. Dans ce dernier, on a considéré l'équation de la conservation de la masse $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. On a démontré aussi dans (3.34) que $\int_0^{x_{front}} h(x, t) dx = constante(t)$. On affiche dans la figure 3.9 l'évolution du volume relatif entre la structure initiale et celle obtenue à l'instant t pour $t \in [0, 100]$.

On vérifie bien évidemment la conservation du volume dans la mesure où on a un volume relatif égale à 0.2% dans le pire des cas.

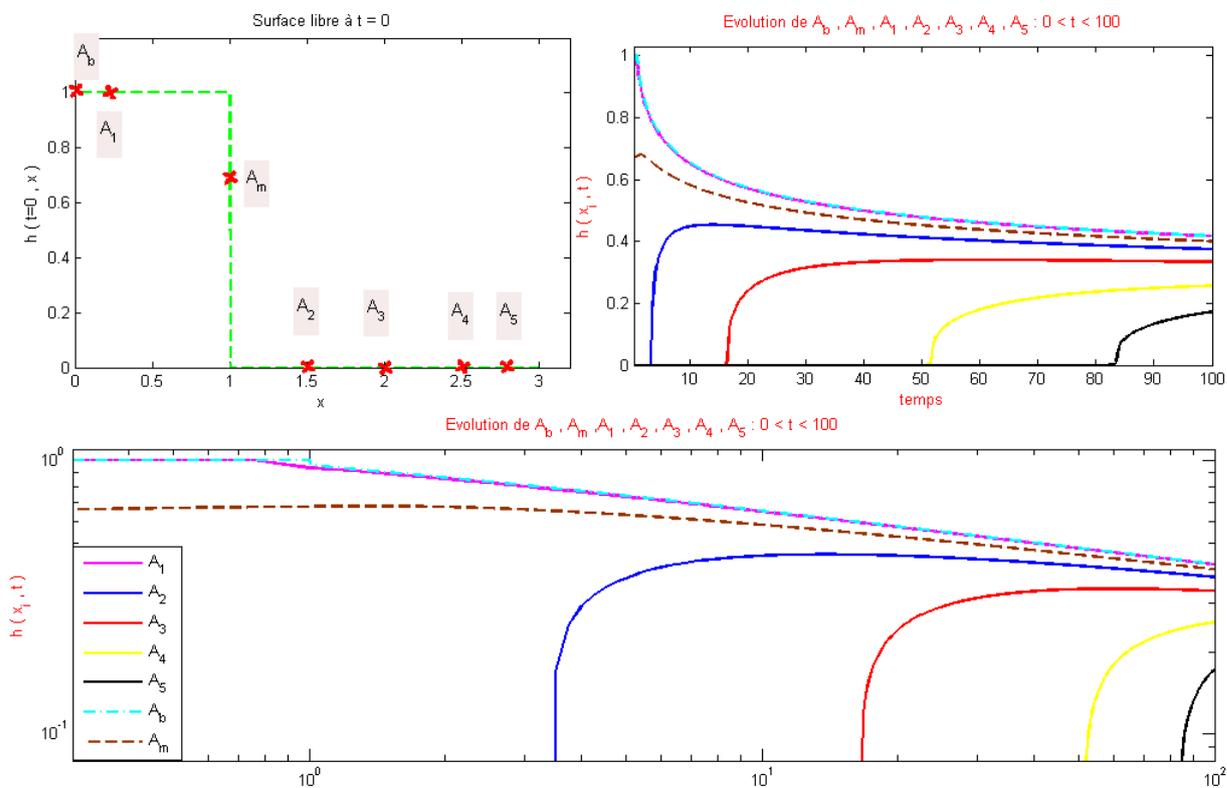


FIG. 3.8 – Évolution des points $A_b, A_m, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ pour $t \in [0, 100]$

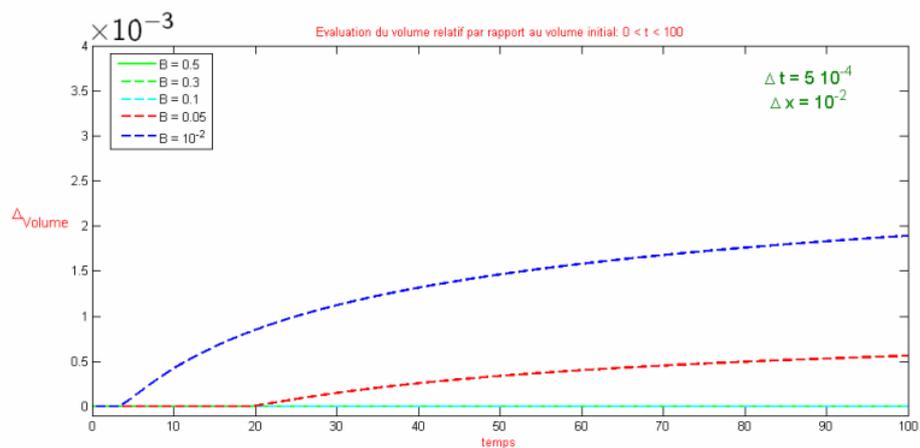


FIG. 3.9 – Évolution du volume relatif pour $B \in \{0.5, 0.3, 0.1, 0.05, 0.01\}$ et $t \in [0, 100]$

Chapitre 4

Étude de l'écoulement dans un canal infini

Sommaire

4.1	Présentation du problème	42
4.2	Adimensionalisation des équations	44
4.3	Modèle asymptotique	46
4.4	Simulations numériques	48
4.4.1	Modèle approché	48
4.4.2	Résultats numériques	48
4.4.3	Conclusion	54

Les écoulements des fluides viscoplastiques à travers des canalisations spéciales représentent dans nos jours plusieurs processus industriels notamment dans le domaine de la mécanique. En effet, dans ce domaine, ceci se manifeste actuellement à travers certaines applications telles que le transport du pétrole dans les pipelines afin de traverser des continents ou l'écoulement du ciment dans des canalisations spécialisées.

Le point commun entre ces applications industrielles est que la longueur du canal est nettement très grande devant le diamètre de la section du canal.

Ainsi, ce chapitre se concentrera sur les aspects touchant à l'écoulement d'un fluide viscoplastique de type Bingham à travers un canal. On considère que le canal est infini et repose sur un plan incliné formant un angle θ par rapport à l'horizontale. Le fluide sera donc soumis à l'action de son propre poids. On s'intéresse au comportement du fluide à travers une section de longueur unitaire et de diamètre ε . Le paramètre ε représente la petite échelle dans ce modèle. Le canal est supposé infini, on utilise donc des conditions périodiques en amont et en aval de la section étudiée.

Les notations seront les mêmes présentées au premier chapitre de rapport. En cas d'ambiguïté, on signale les changements adoptés.

4.1 Présentation du problème

Soit $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq \varepsilon/2$ et $t \geq 0$.

Le modèle mathématique est le suivant :

① Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\tau}} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \quad (4.1)$$

② Conservation de la masse :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (4.2)$$

③ Loi constitutive :

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \left(2\eta + \frac{\tau_p}{\|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|} \right) \mathbf{D}(\mathbf{u}) & \text{si } \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\| \neq 0 \\ \tau = \|\bar{\boldsymbol{\tau}}\| &\leq \tau_0 & \text{si } \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\| = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

④ Condition en $z = \varepsilon/2$: Axe de Symetrie

$$\boldsymbol{\sigma}_T \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.4)$$

⑤ Condition au fond : Non glissement + Non pénétration

$$u = w = 0 \quad \text{si } z = 0 \quad (4.5)$$

☞ Il s'agit de résoudre (4.1-4.5), \mathbf{u} et $\bar{\tau}$ sont les inconnues.

Le tenseur symétrique de déformation est :

$$\bar{\gamma} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T = 2\mathbf{D}(u)$$

On note $\dot{\gamma}_{xx}, \dot{\gamma}_{xz}, \dot{\gamma}_{zx}, \dot{\gamma}_{zz}$ les composantes du tenseur $\bar{\gamma}$ dans le cas d'espace de bi-dimensionnel.

On s'intéresse à la résolution du problème dans un espace de dimension 2 muni du repère (x, z) relié au plan incliné. Les équations de la conservation de la quantité de mouvement et de la masse (4.1) et (4.2) impliquent :

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + wu_z &= -\frac{1}{\rho}p_x + g\sin\theta + \frac{1}{\rho}(\partial_x\tau_{xx} + \partial_z\tau_{xz}) \\ w_t + uw_x + ww_z &= -\frac{1}{\rho}p_z - g\cos\theta + \frac{1}{\rho}(\partial_x\tau_{xz} + \partial_z\tau_{zz}) \\ u_x + w_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le tenseur $\bar{\gamma}$ a pour composantes :

$$\dot{\gamma}_{xx} = 2u_x, \quad \dot{\gamma}_{xz} = u_z + w_x, \quad \dot{\gamma}_{zz} = 2w_z$$

☞ Si $\tau \geq \tau_p$,

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \left(\eta + \frac{\tau_p}{\dot{\gamma}}\right) \dot{\gamma}_{xx} \\ \tau_{zz} &= \left(\eta + \frac{\tau_p}{\dot{\gamma}}\right) \dot{\gamma}_{zz} \\ \tau_{xz} &= \left(\eta + \frac{\tau_p}{\dot{\gamma}}\right) \dot{\gamma}_{xz} \end{aligned} \quad (4.7)$$

☞ Si $\tau < \tau_p$,

$$\dot{\gamma}_{xx} = \dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zz} = 0 \quad (4.8)$$

Les conditions aux bords (4.4) et (4.5) impliquent :

① Condition au fond :

$$u = w = 0 \quad \text{si } z = 0$$

② Condition à $z = \varepsilon/2$:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= 0 \\ \tau_{zz} - p &= 0 \end{aligned}$$

4.2 Adimensionalisation des équations

ε est l'épaisseur caractéristique de la couche du fluide dans le sens de z : c'est la petite échelle. On introduit les dimensions caractéristiques suivantes :

- ☞ U : la vitesse horizontale
- ☞ W : la vitesse verticale
- ☞ T : le temps
- ☞ P : la pression

Les quantités adimensionnelles seront notées par des tildes.

$x = \tilde{x}$, $z = \varepsilon \tilde{z}$, $u = U \tilde{u}$, $w = W \tilde{w}$, $t = \delta \tilde{t}$ et $p = P \tilde{p}$.

Les contraintes seront adimensionalisées comme suit :

$$\tau_{xx} = T_{xx} \tilde{\tau}_{xx}, \tau_{xz} = T_{xz} \tilde{\tau}_{xz}, \tau_{zz} = T_{zz} \tilde{\tau}_{zz}.$$

Le système (4.6) se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U}{\delta} \tilde{u}_t + U^2 \tilde{u} \tilde{u}_x + \frac{UW}{\varepsilon} \tilde{w} \tilde{u}_z = -\frac{1}{\rho} P \tilde{p}_x + g \sin \theta + \frac{1}{\rho} (T_{xx} \partial_x \tilde{\tau}_{xx} + \frac{T_{xz}}{\varepsilon} \partial_z \tilde{\tau}_{xz}) \\ \frac{W}{\delta} \tilde{w}_t + UW \tilde{u} \tilde{w}_x + \frac{W^2}{\varepsilon} \tilde{w} \tilde{w}_z = -\frac{1}{\rho} \frac{P}{\varepsilon} \tilde{p}_z - g \cos \theta + \frac{1}{\rho} (T_{xz} \partial_x \tilde{\tau}_{xz} + \frac{T_{zz}}{\varepsilon} \partial_z \tilde{\tau}_{zz}) \\ U \tilde{u}_x + \frac{W}{\varepsilon} \tilde{w}_z = 0 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

On déduit que $W = \varepsilon U$.

Le premier membre de l'équation 1 de (4.9) implique $\delta = \frac{1}{U}$.

Concernant le tenseur $\dot{\gamma}$, on a :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{xx} &= U 2 \tilde{u}_x = U \tilde{\gamma}_{xx} \\ \dot{\gamma}_{xz} &= \frac{U}{\varepsilon} (\tilde{u}_z + \tilde{w}_x) = \frac{U}{\varepsilon} \tilde{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{zz} &= U \tilde{\gamma}_{zz} \end{aligned} \quad (4.10)$$

a pour norme matricielle :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\dot{\gamma}_{xx}^2 + \dot{\gamma}_{xz}^2} = U \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{(\tilde{u}_z + \varepsilon^2 \tilde{w}_x)^2 + 4\varepsilon^2 \tilde{u}_x^2}$$

On pose :

$$E = \varepsilon \dot{\gamma} = \sqrt{(\tilde{u}_z + \varepsilon^2 \tilde{w}_x)^2 + 4\varepsilon^2 \tilde{u}_x^2}$$

Pour $\varepsilon \tau > B$,

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= T_{xx} \tilde{\tau}_{xx} \\ &= \left(\rho \nu + \frac{\varepsilon \tau_p}{UE} \right) U 2 \tilde{u}_x \\ &= \rho \nu U \left(1 + \frac{\varepsilon \tau_p}{\rho \nu U E} \right) \tilde{u}_x \end{aligned}$$

On choisit donc respectivement :

- ☞ Nombre de Bingham : $B = \varepsilon\tau_p/\rho\nu U$
- ☞ $T_{xx} = \rho\nu U$
- ☞ $\tilde{\tau}_{xx} = 2\left(1 + \frac{B}{E}\right)\tilde{u}_x$
- ☞ $T_{xz} = \rho\nu\frac{U}{\varepsilon}$
- ☞ $\tilde{\tau}_{xz} = \left(1 + \frac{B}{E}\right)(\tilde{u}_z + \varepsilon^2\tilde{w}_x)$
- ☞ $T_{zz} = \rho\nu U$
- ☞ $\tilde{\tau}_{zz} = 2\left(1 + \frac{B}{E}\right)\tilde{w}_z$

Par conséquences,

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \frac{1}{2}(\tau_{xx}^2 + \tau_{zz}^2)} = (\rho\nu U)\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\tilde{\tau}_{xz}^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}(\tilde{\tau}_{xx}^2 + \tilde{\tau}_{zz}^2)} \quad (4.11)$$

Soit $\tilde{\tau} = \frac{1}{\varepsilon}T$ donc :

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\tilde{\tau}_{xz}^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}(\tilde{\tau}_{xx}^2 + \tilde{\tau}_{zz}^2)}$$

L'équation 2 de (4.9) implique :

$$\rho\varepsilon^2U^2(\tilde{w}_t + \tilde{u}\tilde{w}_x + \tilde{w}\tilde{w}_z) = -P\tilde{p}_z - \rho\varepsilon g\cos\theta + \rho\nu U(\partial_x\tilde{\tau}_{zx} + \partial_z\tilde{\tau}_{zz})$$

On divise les deux membres par $\rho\varepsilon g\cos\theta$ et on pose : $P = \rho\varepsilon g\cos\theta$.

On multiplie l'équation 1 de (4.9) par $\frac{1}{\varepsilon g\cos\theta}$:

$$\frac{U^2}{\varepsilon^3 g\cos\theta}\varepsilon^2(\tilde{u}_t + \tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{w}\tilde{u}_z) = -\tilde{p}_x + \tan\theta/\varepsilon + \frac{U\nu}{\varepsilon^3 g\cos\theta}(\varepsilon^2\partial_x\tilde{\tau}_{xx} + \partial_z\tilde{\tau}_{xz})$$

On pose $\frac{U\nu}{\varepsilon^3 g\cos\theta} = 1$ alors $U = \frac{\varepsilon^3 g\cos\theta}{\nu}$.

On choisit le nombre de Réynolds $Re = \frac{U^2}{\varepsilon^3 g\cos\theta}$.

En fonction des paramètres physiques du problème, $Re = \frac{\varepsilon^3 g\cos\theta}{\nu^2}$. On définit le paramètre $S = \frac{\tan\theta}{\varepsilon}$.

Finalement, les équations des moments et d'incompressibilité s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} Re\varepsilon^2[\tilde{u}_t + \tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{w}\tilde{u}_z] = -\tilde{p}_x + S + \varepsilon^2\partial_x\tilde{\tau}_{xx} + \partial_z\tilde{\tau}_{xz} \\ Re\varepsilon^4[\tilde{w}_t + \tilde{u}\tilde{w}_x + \tilde{w}\tilde{w}_z] = -\tilde{p}_z - 1 + \varepsilon^2(\partial_x\tilde{\tau}_{zx} + \partial_z\tilde{\tau}_{zz}) \\ \tilde{u}_x + \tilde{w}_z = 0 \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Les conditions aux bords sont :

① Condition au fond :

$$\tilde{u} = \tilde{w} = 0 \quad \text{si } \tilde{z} = 0$$

② Condition en $\tilde{z} = \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{l} \tilde{\tau}_{xz} = 0 \\ \varepsilon^2\tilde{\tau}_{zz} = \tilde{p} \end{array}$$

4.3 Modèle asymptotique

À ce stage, la solution est étudiée sous une forme approchée en utilisant un développement asymptotique. On résoud alors le système adimensionalisé en utilisant les mêmes développements asymptotiques polynômiaux en ε (voir annexe A).

❖ Dans la suite de ce rapport, afin d'alléger les notations et lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on omettra les tildes.

On utilise les développements asymptotiques suivants :

$$\Leftrightarrow u = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i$$

$$\Leftrightarrow w = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i w_i$$

$$\Leftrightarrow u = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i p_i$$

$$\Leftrightarrow \tau_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{kij}$$

On s'intéresse en premier lieu à l'ordre zéro en ε . A cet ordre, le système adimensionalisé devient :

$$-p_{0x} + S + \partial_z \tau_{0xz} = 0 \quad (4.13)$$

$$-p_{0z} = -1 \quad (4.14)$$

$$u_{0x} + w_{0z} = 0 \quad (4.15)$$

$$E_0 = u_{0z} \quad (4.16)$$

$$\tau_{0xz} = \left(1 + \frac{B}{E_0}\right) u_{0z} \quad (4.17)$$

① Condition au fond : $z = 0$

$$u_0 = w_0 = 0$$

② Condition en $z = 1/2$:

$$p_0 = 0$$

$$\tau_{0xz} = 0$$

On intègre l'équation (4.14) :

$$p_0 = \psi_0(x, t) - z \quad (4.18)$$

avec $\psi_0(x, t)$ la distribution de pression au font. En utilisant les conditions aux bords à la surface libre, on déduit que $\psi_0(x, t) = 1/2$.

On substitue (4.18) dans (4.13) et on intègre :

$$\tau_{0xz} = (Y_0(x, t) - z)S + B \quad (4.19)$$

La constante d'intégration $Y_0(x, t)$ est telle que $\tau_{0xz} = 0$ si $z = Y_0(x, t)$.

On injecte (4.19) dans (4.17) :

$$u_{0z} = (Y_0(x, t) - z)S \quad (4.20)$$

D'après (4.20),

$$u_0 = z \left(Y_0(x, t) - \frac{1}{2}z \right) S \quad (4.21)$$

Or τ_{0xz} en $z = 1/2$, on obtient d'après (4.19)

$$Y_0 = Y_0(x, t) = 1/2 - B/S \quad (4.22)$$

Par conséquent, Y_0 ne dépend pas de x alors :

$$u_{0x} = 0 \quad (4.23)$$

En exploitant la conservation de la masse (4.15) et la condition de non pénétration en $z = 0$:

$$w_0 = \frac{1}{2}z^2 \left[\psi_{0xx} \left(Y_0(x, t) - \frac{1}{3}z \right) - Y_{0x} (S - \psi_{0x}(x, t)) \right] = 0$$

Par conséquent,

$$\tau_{0xx} \approx \left(1 + \frac{B}{E} \right) u_{0x} = 0 \quad (4.24)$$

$$\tau_{0zz} \approx \left(1 + \frac{B}{E} \right) w_{0z} = 0 \quad (4.25)$$

D'autre part, on a :

$$T_0 = |\tau_{0xz}| = |u_{0z} + B| = u_{0z} + B \quad (4.26)$$

La condition critique de passage du régime fluide au régime solide est $T = \varepsilon\tau = B$. A l'ordre dominant en ε , ceci est équivalent à $u_{0z} = 0$. D'après (4.19), ceci localise la surface critique en $z = Y_0$.

D'après les conditions aux bords au niveau de $z = 1/2$, $\tau_{0xz} = 0 < B$, alors la surface critique sépare entre une zone fluide au dessous qui est cisailée et une zone solide au dessus de la surface de séparation.

On remarque aussi que la surface de séparation des deux régimes est une

Au niveau de la zone solide, le champs de vitesse horizontale est constant et il a pour valeur :

$$u_0(x, z, t) = u_0(x, Y_0, t) = \frac{1}{2}Y_0^2 S \quad (4.27)$$

Néanmoins, la zone fluide n'existe pas si on n'a pas suffisamment de contraintes au fond. En d'autres termes si :

$$\tau_{0xz} = Y_0 S + B < B \text{ si } z = 0 \quad (4.28)$$

ceci est équivalent à :

$$0 < B < \frac{\tan\theta}{2\varepsilon} \quad (4.29)$$

4.4 Simulations numériques

4.4.1 Modèle approché

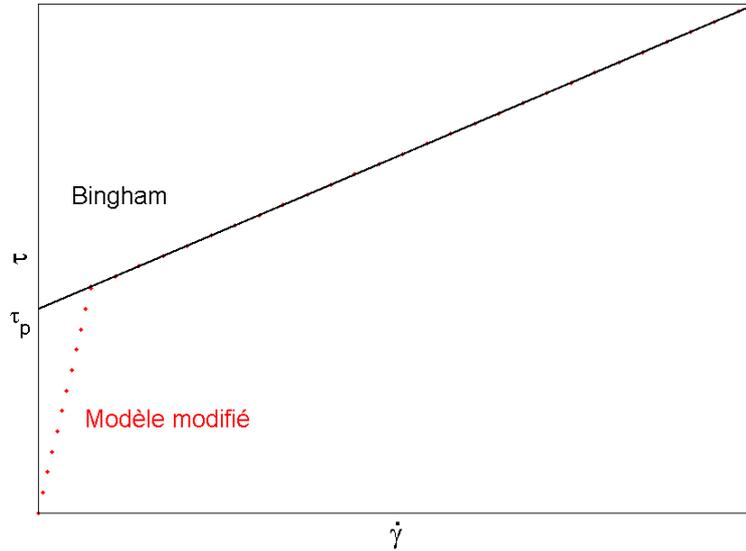


FIG. 4.1 – Modèle constitutif du fluide de Bingham et sa régularisation

Pour remédier à la singularité de τ au niveau de $\dot{\gamma} = 0$, on régularise la singularité au niveau d'un voisinage $\dot{\gamma} \in V = [0, \sigma]$ où σ un paramètre infiniment petit.

Le système (4.3) est régularisé comme suit : (voir figure 4.1)

$$\begin{cases} \bar{\tau} = \left(\eta + (1 - \alpha) \frac{\tau_p}{\|\dot{\gamma}\|} \right) \bar{\gamma} & \text{si } \tau > \tau_p \\ \bar{\tau} = \eta' \bar{\gamma} & \text{si } \tau \leq \tau_p \end{cases} \quad (4.30)$$

avec

$$\alpha = \frac{\eta'}{\eta}$$

Si $\alpha \rightarrow 0$, on récupère le modèle viscoplastique de Bingham.

Si $\alpha = 1$ ou $\tau_p = 0$, le fluide est newtonien : c'est le modèle de Navier-Stokes incompressible.

4.4.2 Résultats numériques

Pour valider les résultats théoriques établis dans les parties précédentes de ce chapitre, on procède à une série de simulations numériques qui effectuées à l'aide de Freefem++ et Matlab7.0.1.

Dans cette partie, on prend $\alpha = 10^{-4}$. On effectue deux séries de simulations numériques correspondant à un nombre de Bingham $Bn = 0.0$ et $Bn = 1.3$.

On résout le problème (4.1)-(4.5) par éléments finis : on considère que le régime est établi lorsque le profil de vitesse sera constant à 10^{-10} près. On s'intéresse au champ de vitesse pour $x = \frac{1}{2}$.

Ensuite, on calcule la solution approchée de vitesse donnée par les développements asymptotiques et on se ramène aux variables réelles au moyen des paramètres caractéristiques. On varie l'épaisseur du canal ε et on trace la norme L^2 de l'erreur entre la profil exact obtenu par résolution directe et le profil asymptotique approché : $\|u - u_\varepsilon\|_{L^2}$. L'erreur sera tracée en échelle log-log.

Vu que le modèle asymptotique a été obtenu en choisissant un nombre de Réynolds $Re = O(1)$ alorson effectue toutes les simulations avec $Re = 1$.

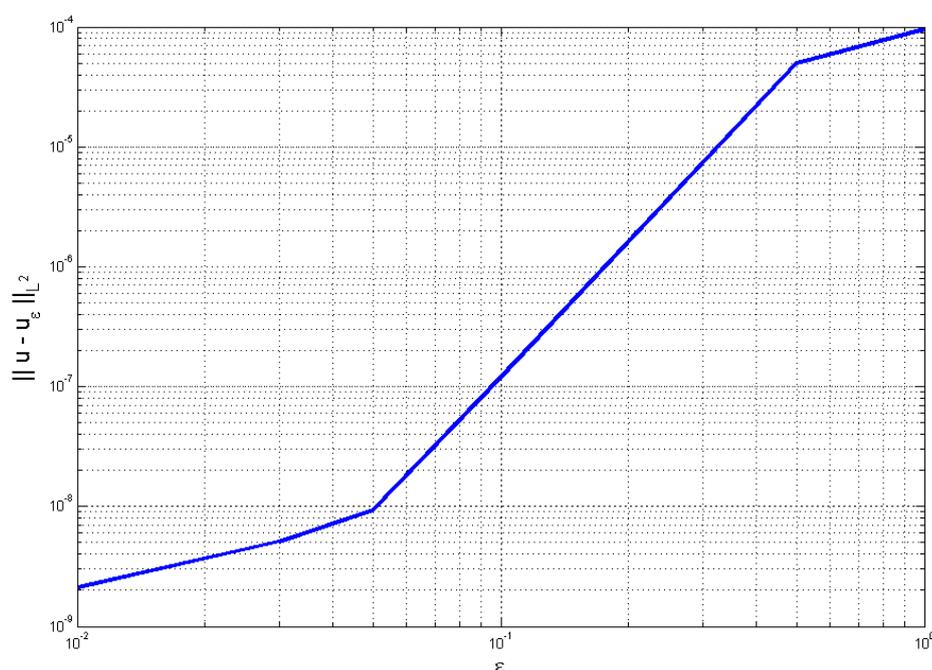


FIG. 4.2 – Évolution de l'écart entre la solution approchée et la solution numérique en fonction de ε dans le cas newtonien

Les figures 4.2 et 4.3 montrent que si ε devient de plus en plus faible, le profil asymptotique s'approche infiniment du profil exacte :

Pour $\varepsilon = 10^{-2}$, on a égalité à 10^{-9} près pour $Bn = 0$ et à 10^{-6} près pour $Bn = 1.30$. Dans le cas newtonien, l'erreur est nettement plus faible par rapport au cas viscoplastique : la méthode de régularisation du modèle de Bingham peut être à l'origine. Pour $B = 1.30$, L'évolution de l'erreur est linéaire par rapport à ε .

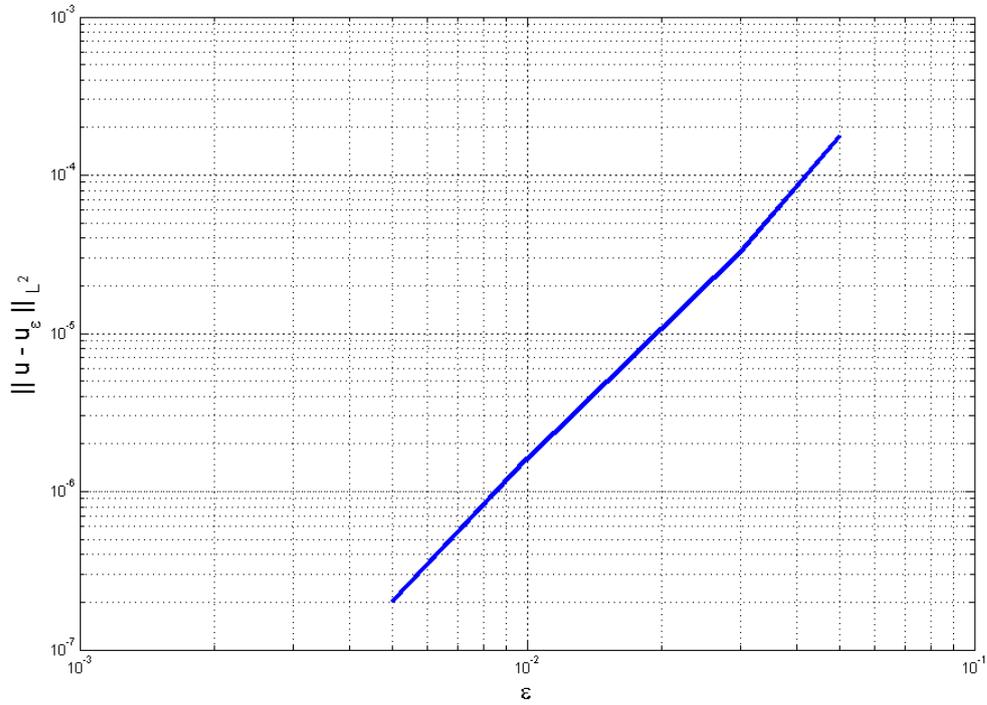


FIG. 4.3 – Évolution de l'écart entre la solution approchée et la solution numérique en fonction de ε pour $B = 1.3$

Dans la figure 4.4, on choisit $\varepsilon = 0.05$ et on trace, pour différents valeurs du nombre de Bingham les solutions de vitesses obtenues respectivement par résolution numérique du modèle régularisé et par développements asymptotiques. Les profils sont nettement très proches et on note qu'on récupère le profil de Poiseuille dans le cas newtonien.

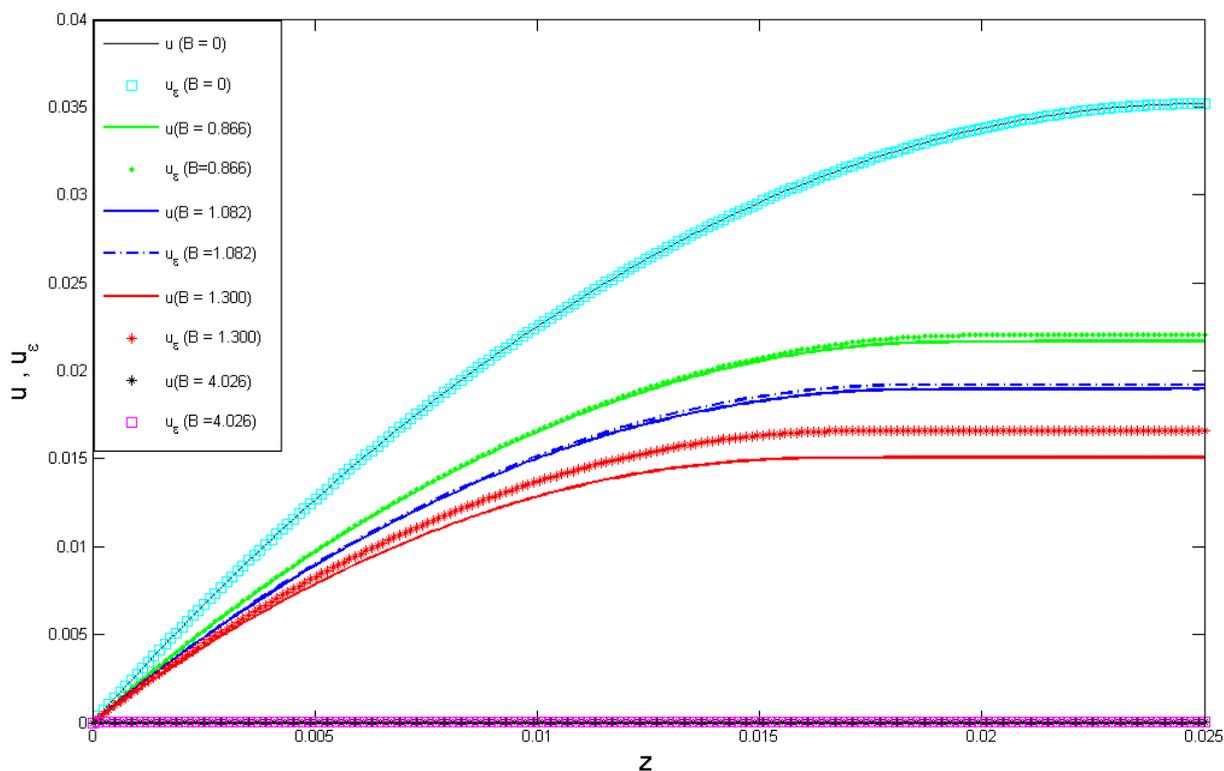


FIG. 4.4 – Profil numérique et asymptotique du champs de vitesse en fonction du nombre de Bingham

Dans la figure 4.5, on trace l'évolution de la vitesse de convergence de la solution du modèle régularisé en fonction du temps. On choisit le cas newtonien et on varie l'épaisseur du canal ε . On remarque que l'écoulement accélère dans une première étape avant de converger lentement vers le régime stable avec une vitesse plus rapide si ε est de plus en plus petite.

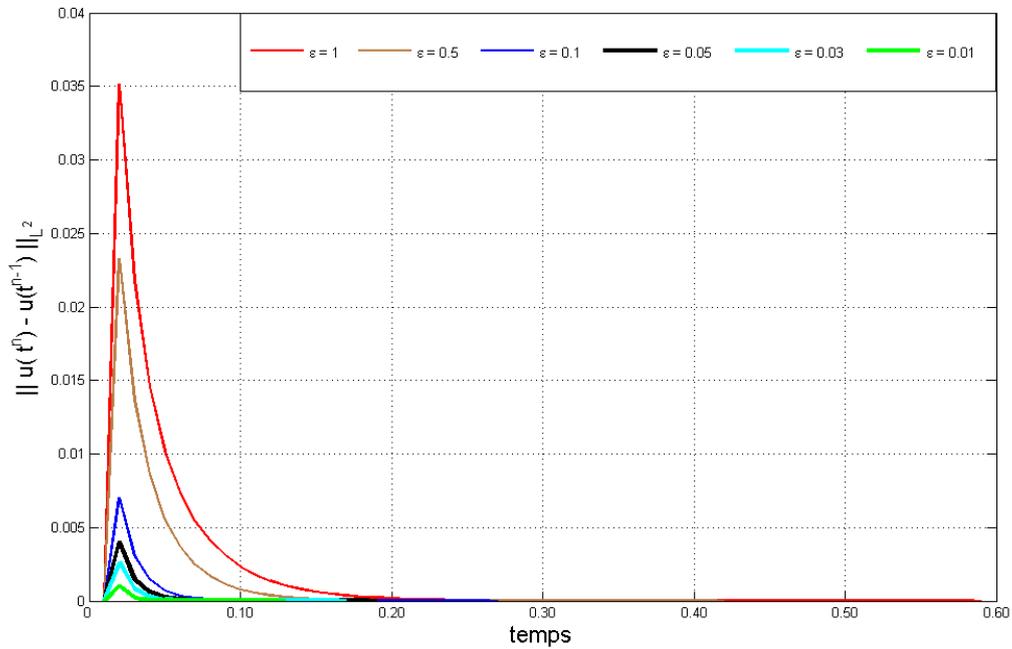


FIG. 4.5 – Etablissement du régime en échelle Décimale

Dans la figure 4.6, on met en évidence l'effet de la régularisation de la singularité au niveau du modèle visco-plastique de Bingham. On trace la norme L^2 de l'erreur entre le profil numérique et asymptotique en fonction du rapport de viscosité $\alpha = \eta/\eta'$. On déduit que si $\alpha < 10^{-3}$, $\|u - u^\epsilon\|_{L^2}$ reste constant à 10^{-6} près. On conclut que le modèle régularisé est stable lorsque $\alpha \rightarrow 0$, néanmoins, il reste à comparer la solution obtenue à une solution qu'on calcule exactement afin de conclure sur la validité du modèle modifié.

On note que pour les simulations réalisées, on a opté pour $\alpha = 10^{-4}$.

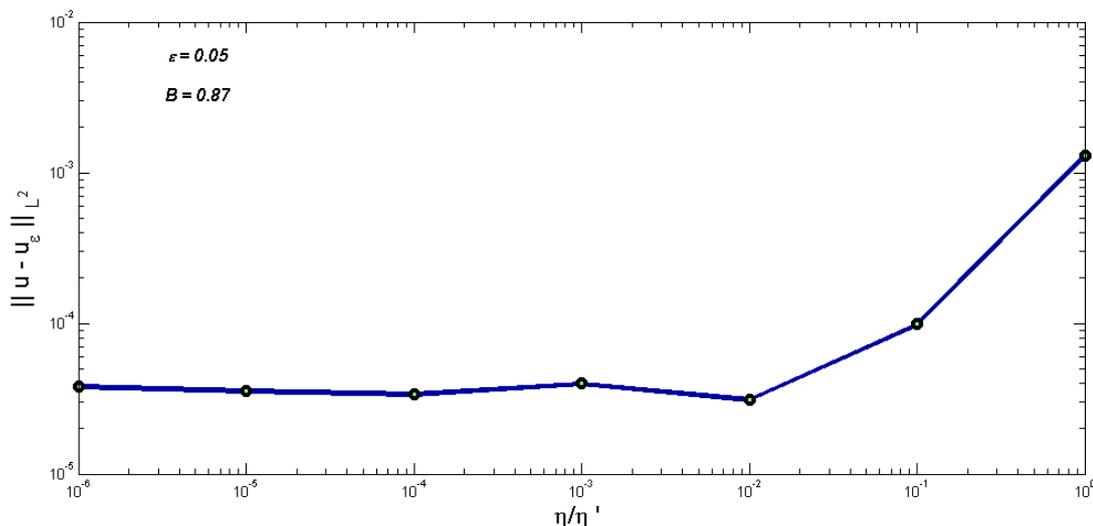


FIG. 4.6 – Effet de la régularisation de la Singularité

Dans la suite, on trace le tableau récapitulatif 4.4.2 des résultats des simulations faites en choisissant $\alpha = 10^{-4}$ et en faisant varier ε ainsi que le nombre de Bingham. On choisit $Re = 1$ et on donne la valeur de la vitesse moyennée en épaisseur résolue numériquement et par développements asymptotiques, on calcule en plus $\|u - u_\varepsilon\|_{L^2}$.

ε	B	\bar{u}	\bar{u}_ε	$\ u - u_\varepsilon\ _{L^2}$
1	0	0.1052	0.1053	9.6870e-005
0.5	0	0.0744	0.0745	5.0815e-005
0.1	0	0.0333	0.0333	1.2047e-007
0.05	0	0.0235	0.0235	9.4393e-009
	0.87	0.0161	0.0163	3.3956e-005
	1.08	0.0143	0.0145	3.0349e-005
	1.30	0.0118	0.0128	1.7683e-004
0.03	0	0.0182	0.0182	5.1539e-009
	1.30	0.0129	0.0131	3.2826e-005
0.01	0	0.0105	0.0105	2.1372e-009
	1.30	0.0095	0.0095	1.6185e-006
0.005	1.30	0.0071	0.0071	2.0190e-007

TAB. 4.1 – Tableau récapitulatif des résultats numériques

4.4.3 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est de traiter un modèle simple d'écoulement de fluides viscoplastiques à travers une canalisation infini. Ceci peut être une première approche avant de traiter un cas plus intéressant qui est l'écoulement du sang dans les artères.

Le modèle de la circulation sanguine est plus compliqué dans la mesure où il faut le traiter dans le cas d'une frontière libre. La frontière tend vers un état d'oscillations périodiques au cours du temps. Étant donné la symétrie axisymétrique des vaisseaux sanguins, il sera plus intéressant de refaire les calculs avec les coordonnées radiales.

Conclusions et perspectives

Une application géophysique très riche a été traitée lors ce travail où on s'est intéressé au comportement des laves volcaniques en écoulement et notamment à leurs régimes qui dépendent des caractérisations intrinsèques du fluide traduides par le nombre de Bingham.

Ce travail nous a autorisé de construire une approximation globale de la solution en vitesse combinant deux types de termes : les premiers interviennent en la variable micro et les seconds en la variable macro. Les termes ont été superposés à l'aide des fonctions de troncatures.

Cette étude nous a permit aussi de mettre en évidence numériquement des similitudes avec le comportement des fluides viscoplastiques observé expérimentalement où prouvé dans des travaux ultérieurs. Nous évoquons ainsi une transition entre deux régimes, plastique et semi rigide. Cette transition est gouvernée par un seul nombre sans dimension, le nombre de Bingham, qui se traduit par une contrainte seuil seulement au delà de laquelle le fluide se met en mouvement. La présence de viscoplasticité affecte naturellement la morphologie des états stationnaires et la dynamique de stabilisation, ceci est confirmé à travers les résultats numériques et leurs interprétations.

Pour ce qui est des perspectives, On peut s'intéresser au cas de circulation du sang dans les vaisseaux sanguins qui traduit une application biomédicale très complexe mais tellement riche qu'on peut traiter à l'échelle microscopique et à l'échelle macroscopique.

À l'échelle microscopique, il s'agit de refaire les calculs dans les coordonnées cylindriques. Le modèle cinématique porte donc sur la composante radiale et la loi de comportement de la paroi libre sera plus compliquée afin de traduire un mouvement sinusoidale à l'infini.

Une autre perspective qui est sans doute très intéressante est l'étude à l'échelle macroscopique du comportement des vésicules biologiques qui représentent une surface de séparation entre deux fluides. Le fluide dans lequel les vésicules sont plongées peut être celui de Bingham. Enfin et c'est sans doute le plus important, la loi de comportement entre les vésicules, dont la prise en compte n'a pas été ébauchée dans ce travail, doivent être étudiés amplement. Un grand nombre d'études expérimentales ont pu être effectuées sur ce sujet, mais un cadre explicatif global manque encore, et les simulations numériques pourraient se révéler pertinentes à ce niveau...

Annexes

Annexe A

Développements multi-échelles du système de Bingham

Dans cette partie, on se propose de détailler les calculs qui ont été faites dans l'article de Balmforth et Craster [2]. L'objectif est de rédiger les démonstrations de manière justifié et plus claire que celle avec laquelle cet article a été rédigé. On décide aussi de détailler ces démonstrations dans un souci de rendre ce travail autonome en soi-même et permettre au lecteur de comprendre les détails sans chercher d'autres références.

On commence par rappeler le système de Bingham dans le cas général avant de se focaliser sur le cas bidimensionnel. On procède à l'adimensionalisation des équations en premier lieu. On suppose ensuite qu'il existe un régime purement plastique et on montre que c'est impossible d'avoir ceci. On conclut qu'il existe une deuxième zone qu'on démontre qu'elle est faiblement cisailée en la comparant à la zone plastique. Finalement, on donne un profil approché de la vitesse et on trouve un deuxième modèle qui décrit l'évolution de la surface libre : c'est le modèle cinématique.

A.1 Position du problème

On utilise les mêmes notations définies dans le premier chapitre de ce rapport. Le modèle de Bingham est formé des équations suivantes :

① Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\tau}} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \quad (\text{A.1})$$

② Conservation de la masse :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.2})$$

③ Loi constitutive :

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \left(2\eta + \frac{\tau_p}{\|\mathbf{D}(\mathbf{u})\|} \right) \mathbf{D}(\mathbf{u}) & \text{si } \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\| \neq 0 \\ \tau = \|\bar{\boldsymbol{\tau}}\| &\leq \tau_0 & \text{si } \|\mathbf{D}(\mathbf{u})\| = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

④ Condition à la surface libre :

$$\sigma_T \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{si } z = h(t, x) \quad (\text{A.4})$$

⑤ Condition au fond : Non glissement + Non pénétration

$$u = w = 0 \quad \text{si } z = 0 \quad (\text{A.5})$$

☞ Il s'agit de résoudre (A.1-A.5), \mathbf{u} et τ sont les inconnues.

Le tenseur symétrique de déformation est :

$$\bar{\gamma} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T = 2\mathbf{D}(u)$$

On note $\dot{\gamma}_{xx}, \dot{\gamma}_{xz}, \dot{\gamma}_{zx}, \dot{\gamma}_{zz}$ les composantes du tenseur $\bar{\gamma}$ dans le cas d'espace de dimension 2.

On utilise la norme matricielle :

$$\|\tau\| = \frac{1}{2} \sqrt{\tau : \tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\tau_{jk} \tau_{jk}}$$

On note :

$$\dot{\gamma} = \|\gamma\|$$

La surface libre sera considérée comme une courbe de niveau. On adopte la notation suivante pour le domaine du fluide :

$$\Omega(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq h(x, t)\}$$

On définit la fonction indicatrice :

$$\varphi(t, x, z) = h(t, x) - z \begin{cases} \geq 0 & \text{dans } \Omega(t) \\ \leq 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega(t) \end{cases}$$

La surface libre sera la courbe de niveau 0 de cette fonction :

$$\Gamma_L(t) = \{(t, x, z) \in]0, T[\times \Omega(t) / \varphi(t, x, z) = 0\}$$

La normale extérieure à la surface libre est :

$$\mathbf{n}(x, z = h(t, x)) = \frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\partial h / \partial x \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Le domaine $\Omega(t)$ est transportée par l'écoulement. On traduit ceci pour toutes les courbes de niveaux et en particulier pour $\Gamma_L(t)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (\text{A.7})$$

On obtient la loi suivante :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - w \right) = 0 \quad \text{pour } z = h(t, x) \quad (\text{A.8})$$

A.2 Adimensionalisation des équations

A.2.1 Notion d'échelle

La notion d'échelle est fondamentale pour caractériser l'ordre de grandeur d'une quantité physique. En effet, on dit qu'une échelle est bien adaptée à la quantité que l'on mesure si le nombre qui mesure cette quantité avec l'échelle choisie est de l'ordre de l'unité.

La notion d'ordre de grandeur est couramment utilisée dans le langage habituel.

☞ Les quantités A et B sont du même ordre de grandeur si :

- A et B se mesurent avec la même unité physique.
- Les rapports A/B ou B/A sont dans l'intervalle $[10^{-1}, 10]$. En adoptant cette convention, on estime que un nombre sans dimension N est d'ordre unité si $10^{-1} < N < 10$.
- Ordre de $A \leq$ Ordre de B si $A/B \leq 10^{-1}$. En d'autres termes, négliger A devant B c'est accepter une erreur de 10%.

Pour mettre en évidence de façon explicite l'ordre de grandeur A_0 d'une quantité physique A, on décrit $A = A_0 \tilde{A}$. D'après ce qui précède, A_0 a la même dimension physique que A et $\tilde{A} = A/A_0$ est la valeur sans dimension de A comprise entre 10^{-1} et 10. En d'autres termes \tilde{A} est le nombre d'ordre unité qui mesure la quantité physique A et A_0 est son échelle.

A.2.2 Adimensionalisation

Soit H l'épaisseur caractéristique de la couche du fluide dans le sens de z et L la longueur caractéristique dans le sens des x . On introduit le paramètre $\varepsilon = H/L$ et les dimensions caractéristiques suivantes :

- ☞ U : la vitesse horizontale
- ☞ $W = \varepsilon U$: la vitesse verticale
- ☞ $T = L/U$: le temps
- ☞ $P = \rho g H \cos \theta$: la pression
- ☞ on choisit $U = (gH^3/\nu L) \cos \theta$

On dénote temporairement les quantités adimensionnelles par des tildes :

$$x = L\tilde{x}, z = H\tilde{z}, h = H\tilde{h}, u = U\tilde{u}, w = (UH/L)\tilde{w}, t = (L/U)\tilde{t}, p = \rho g H \cos(\theta)\tilde{p}.$$

Les contraintes seront adimensionalisés comme suit :

$$\tau_{xx} = \eta(U/L)\tilde{\tau}_{xx}, \tau_{xz} = \eta(U/H)\tilde{\tau}_{xz}, \tau_{zz} = \eta(U/L)\tilde{\tau}_{zz}.$$

On définit : $S = \tan(\theta) L/H$ ainsi que le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{U^2}{gH \cos(\theta)} \frac{L^2}{H^2} \equiv \frac{gH^3}{\nu^2} \cos(\theta)$$

On prend le nombre de Réynolds en $O(1)$ par rapport à ε et on définit le nombre sans dimension de Bingham par :

$$B = \frac{\tau_p H}{\rho \nu U} = \frac{\tau_p L}{\rho g H \cos(\theta)}$$

Dans la suite de ce rapport, afin d'alléger les notations et lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on omettra les tildes.

Les équations adimensionalisées de conservations de la quantité de mouvement et de masse (A.1) et (A.2) impliquent dans le cas bi-dimensionnel :

$$\varepsilon^2 Re (u_t + uu_x + wu_z) = -p_x + S + \varepsilon^2 \partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz} \quad (\text{A.9})$$

$$\varepsilon^4 Re (w_t + ww_x + ww_z) = -p_z - 1 + \varepsilon^2 (\partial_x \tau_{zx} + \partial_z \tau_{zz}) \quad (\text{A.10})$$

$$u_x + w_z = 0 \quad (\text{A.11})$$

Le tenseur symétrique $\bar{\gamma} = 2\mathbf{D}(\mathbf{u})$ aura pour composantes :

$$\dot{\gamma}_{xx} = 2u_x, \quad \dot{\gamma}_{xz} = u_z + \varepsilon^2 w_x, \quad \dot{\gamma}_{zz} = 2w_z$$

Soit $E = \varepsilon \dot{\gamma} = \sqrt{(u_z + \varepsilon^2 w_x)^2 + 4\varepsilon^2 u_x^2}$

☞ Pour $\varepsilon\tau > B$,

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2 \left(1 + \frac{B}{E}\right) u_x \\ \tau_{zz} &= 2 \left(1 + \frac{B}{E}\right) w_z \\ \tau_{xz} &= \left(1 + \frac{B}{E}\right) (u_z + \varepsilon^2 w_x) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$\bar{\tau}$ aura pour norme :

$$\tau = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\tau_{xz}^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} (\tau_{xx}^2 + \tau_{zz}^2)} = \frac{1}{\varepsilon} T \quad (\text{A.13})$$

☞ Pour $T = \varepsilon\tau < B$,

$$u_x = u_z + \varepsilon^2 w_x = w_z = 0$$

Les conditions aux bords (A.4) et (A.5) impliquent, en utilisant (A.8) :

① Condition au fond :

$$u = w = 0 \quad \text{si } z = 0$$

② Condition à la surface libre :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - w \right) = 0 \quad \text{pour } z = h(t, x)$$

$$\tau_{xz} + p h_x = \varepsilon^2 h_x \tau_{xx} \quad \text{pour } z = h(t, x)$$

$$p = \varepsilon^2 (\tau_{zz} - h_x \tau_{xz}) \quad \text{pour } z = h(t, x)$$

A.3 Développement asymptotique

La formulation mathématique de la plupart des phénomènes physiques conduit parfois à des équations contenant un (ou plusieurs) petits paramètres, comme dans l'exemple ci-dessus. La solution est alors étudiée sous une forme approchée en recherchant un développement asymptotique.

A.3.1 Définition d'un développement asymptotique

On appelle développement asymptotique d'une fonction $f(\varepsilon)$, une expression de la forme :

$$F_n^\varepsilon = \sum_{i=0}^n \eta_i(\varepsilon) a_i(\varepsilon)$$

avec :

$$a_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\eta_0(\varepsilon)}$$

$$a_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon) - F_{k-1}^\varepsilon}{\eta_k(\varepsilon)}$$

De façon pratique un développement asymptotique est un développement limité à $n+1$ termes pour lequel on ne se pose aucune question de convergence, F_n^ε est une représentation approchée de $f(\varepsilon)$. L'erreur que l'on commet est de $o(\eta_n(\varepsilon))$.

En général, il n'est pas nécessaire de calculer beaucoup de termes. En effet, un développement asymptotique n'est pas nécessairement convergent lorsque le nombre de termes n tend vers l'infini. Par contre à nombre de termes fixes, il s'approche d'autant plus de la solution que ε est petit.

A.3.2 Régime fluide

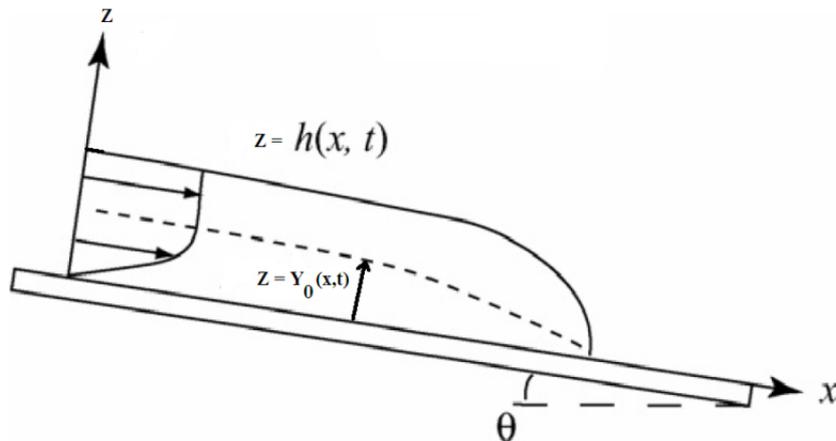


FIG. A.1 – Fluide en écoulement

Dans une première étape, on suppose qu'on a partout le régime fluide appelé aussi régime plastique et on utilise le développement asymptotique suivant :

$$\Leftrightarrow u = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i$$

$$\Leftrightarrow w = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i w_i$$

$$\Leftrightarrow p = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i p_i$$

$$\Leftrightarrow \tau_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{kij}$$

On substitue ces équations dans le système et on s'intéresse en premier lieu à l'ordre principal en epsilon. On obtient successivement :

$$-p_{0x} + S + \partial_z \tau_{0xz} = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$-p_{0z} = -1 \quad (\text{A.15})$$

$$u_{0x} + w_{0z} = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$E_0 = u_{0z} \quad (\text{A.17})$$

$$\tau_{0xx} = 2 \left(1 + \frac{B}{E_0}\right) u_{0x}, \quad \tau_{0zz} = 2 \left(1 + \frac{B}{E_0}\right) w_{0z}, \quad \tau_{0xz} = \left(1 + \frac{B}{E_0}\right) u_{0z} \quad (\text{A.18})$$

En ce qui concerne les conditions aux bords, on a :

① Condition au fond : $z = 0$

$$u_0 = w_0 = 0$$

② Condition à la surface libre : $z = h_0(t, x)$

$$\left(\frac{\partial h_0}{\partial t} + u \frac{\partial h_0}{\partial x} - w_0 \right) = 0$$

$$\tau_{0xz} = 0$$

$$p_0 = 0$$

On intègre l'équation (A.15) :

$$p_0 = \psi_0(x, t) - z \quad (\text{A.19})$$

$\psi_0(x, t)$ représente la distribution de pression tout au long du fond Γ_D . On substitue (A.19) dans (A.14) et on intègre :

$$\tau_{0xz} = (Y_0(x, t) - z)(S - \psi_{0x}(x, t)) + B \quad (\text{A.20})$$

La constante d'intégration $Y_0(x, t)$ est tel que $\tau_{0xz} = 0$ pour $z = Y_0(x, t)$. On injecte (A.20) et (A.17) dans (A.18) :

$$u_{0z} = (Y_0(x, t) - z)(S - \psi_{0x}(x, t)) \quad (\text{A.21})$$

(A.18) implique :

$$u_0 = z \left(Y_0(x, t) - \frac{1}{2}z \right) (S - \psi_{0x}(x, t)) \quad (\text{A.22})$$

En exploitant la relation d'incompressibilité (A.16) :

$$w_0 = \frac{1}{2}z^2 \left[\psi_{0xx} \left(Y_0(x, t) - \frac{1}{3}z \right) - Y_{0x}(S - \psi_{0x}(x, t)) \right] \quad (\text{A.23})$$

(A.13) et (A.20) donnent :

$$T_0 = |\tau_{0xz}| = |u_{0z} + B| = u_{0z} + B \quad (\text{A.24})$$

La relation de passage du régime fluide au régime solide est $T = \varepsilon\tau = B$. A l'ordre principal du développement asymptotique, ceci est équivalent à $u_{0z} = 0$. D'après (A.21), on obtient une surface critique pour $z = Y_0(x, t)$.

Les conditions aux bords au niveau de la surface libre, à savoir $z = h_0(x, t)$ impliquent $\tau_{0xz} = 0 < B$. On conclut que la surface critique sépare entre la zone fluide caractérisée par un mouvement de cisaillement et une deuxième zone solide, appelée aussi domaine rigide, qui se situe au dessus de la surface de séparation (figure A.1).

Au niveau du domaine solide, la vitesse horizontale est constante. Elle vaut :

$$u_0(x, z, t) = u_0(x, Y_0(x, t), t) = \frac{1}{2}Y_0^2(x, t)(S - \psi_{0x}(x, t)) \quad (\text{A.25})$$

À ce niveau, on conclut que l'hypothèse de la présence d'un régime purement plastique est irrévocablement fausse. Par conséquent, la zone solide existe toujours.

Néanmoins, on signale que il est possible de ne pas avoir une zone fluide si le fond n'est pas suffisamment soumis à une contrainte. En d'autres termes si

$$\tau_{0xz} < B \text{ pour } z = 0 \quad (\text{A.26})$$

On déduit des conditions aux bords en $z = h_0(x, t)$ que $p(x, h_0, t) = 0$. D'après (A.19),

$$\psi_0(x, t) = h_0(x, t)$$

D'après (A.20),

$$\tau_{0xz} = 0 \text{ si } z = h_0(x, t)$$

Alors,

$$Y_0(x, t) = h_0(x, t) - \frac{B}{S - h_{0x}} \quad (\text{A.27})$$

(A.20) implique :

$$\tau_{0xz} = (h_0(x, t) - z)(S - h_{0x}(x, t)) \quad (\text{A.28})$$

Il existe des situations pour lesquelles le fluide viscoplastique ne se met pas en mouvement. En d'autres termes, on ne voit que le domaine rigide partout.

Ceci est possible si la condition (A.26) est aussi vrai au fond, donc d'après (A.28) :

$$|h_0(x, t)(S - h_{0x}(x, t))| < B \quad (\text{A.29})$$

A.3.3 Une fausse surface critique

On a montré qu'il est impossible d'avoir un écoulement purement fluide dans le cas non newtonien.

Si le fond est suffisamment soumis à une contrainte, on :

$$|h_0(x, t)(S - h_{0x}(x, t))| > B$$

et on distingue entre deux zones qui sont séparées par une surface critique au niveau de $z = Y_0(x, t)$.

Dans ce domaine, u_0 est indépendant z et a pour expression (A.25) :

$$u_0(x, z, t) = u_0(x, t) = \frac{1}{2}Y_0^2(x, t)(S - \psi_{0x}(x, t))$$

Des observations physiques montrent qu'il n'existe pas une zone solide. Néanmoins, on observe un faible cisaillement dans la partie supérieure de l'écoulement.

Il reste à apporter des justifications mathématiques pour confirmer ces observations. On s'intéresse donc aux équations (A.12) qui impliquent particulièrement :

$$\tau_{0xx} = 2 \left(1 + \frac{B}{u_{0z}}\right) u_{0x}, \quad \tau_{0zz} = 2 \left(1 + \frac{B}{u_{0z}}\right) u_{0z}, \quad (\text{A.30})$$

On constate que ces deux composantes du tenseur des contraintes divergent au niveau de la surface critique alors qu'on aimerait qu'ils restent bornées (on note que $u_{0x} \neq 0$ pour $z = Y_0(x, z, t)$).

La source du problème provient donc de l'approximation suivante :

$$\frac{B}{E} = \frac{B}{\sqrt{(u_z + \varepsilon^2 w_x)^2 + 4\varepsilon^2 u_x^2}} \approx \frac{B}{u_{0z}} + O(\varepsilon)$$

Cette approximation devient incorrecte lorsque u_{0z} devient de l'ordre de ε .

Pour remédier à ce problème, il faut passer à l'ordre supérieur dans le développement asymptotique de $u(x, z, t)$ afin de rendre la dernière approximation comme suit :

$$\frac{B}{E} \approx \frac{B}{u_{0z} + \varepsilon u_{1z}}$$

La conséquence immédiate de ce raisonnement est que la surface critique, qui existe toujours suite aux conditions aux bords au niveau de la frontière libre, est réellement une fausse surface critique dans la mesure où elle sépare entre deux zones, la première est fortement cisailée et la deuxième est faiblement cisailée. Cette dernière est par conséquent semi-régide. Ce dernier point sera développé formellement dans la partie qui suit.

A.3.4 Le régime semi-régide

Au delà de la fausse yield surface $z = Y_0(x, t)$, on se contente dans ce qui précède d'un développement asymptotique à l'ordre zéro, or cette région ne peut être en aucun cas une zone régide. Pour approcher la solution dans cette zone, on doit revoir l'approximation de la vitesse horizontale. Explicitement, on passe au premier ordre dans le développement asymptotique de $u(x, z, t)$:

$$u(x, z, t) \approx u_0(x, Y_0(x, t), t) + \varepsilon u_1(x, z, t) \quad (\text{A.31})$$

Cette approximation vient suite à $u_{0z}(x, Y_0(x, t), t) = 0$. On s'intéresse par la suite à la zone semi-régide. Les équations (A.12) deviennent :

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2 \left(1 + \frac{B}{\varepsilon \dot{\gamma}} \right) u_x \\ \tau_{zz} &= 2 \left(1 + \frac{B}{\varepsilon \dot{\gamma}} \right) w_z \\ \tau_{xz} &= \left(1 + \frac{B}{\varepsilon \dot{\gamma}} \right) (u_z + \varepsilon^2 w_x) \end{aligned}$$

La conservation de la masse (A.16) implique :

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} \tau_{xz}^2 + \tau_{xx}^2}$$

Avec

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{u_z}{\varepsilon} + \varepsilon w_x \right)^2 + 4u_x^2}$$

On note $\varepsilon \tau = \tau_{-1}$. Pour $\tau_{-1} > B$, on aura :

$$\begin{aligned} \tau_{-1xx} &= 2 \frac{B}{\dot{\gamma}} u_{0x} \\ \tau_{-1zz} &= 2 \frac{B}{\dot{\gamma}} w_{0z} \\ \tau_{0xz} &= \frac{B}{\dot{\gamma}} u_{1z} \end{aligned}$$

D'où

$$\dot{\gamma}_0 = \sqrt{u_{1z}^2 + 4u_{0x}^2} \quad (\text{A.32})$$

$$\tau_{-1} = \sqrt{\tau_{0xz}^2 + \tau_{-1xx}^2} \quad (\text{A.33})$$

Les équations de la conservation de la quantité de mouvement (A.9) (A.10) donnent :

$$-p_{0x} + S + \partial_z \tau_{0xz} = 0 \quad (\text{A.34})$$

$$-p_{0z} = -1 \quad (\text{A.35})$$

On exploite (A.35) et la la condition au bord au niveau de la surface libre :

$$p_0 = h_0(x, t) - z \quad (\text{A.36})$$

On combine (A.34) et (A.35) sachant que la composante τ_{0xz} du tenseur des contraintes est nulle à la surface libre :

$$\tau_{0xz} = \frac{B}{\gamma} u_{1z} = (h_0(x, t) - z)(S - h_{0x}(x, t)) \quad (\text{A.37})$$

(A.32) et (A.37) impliquent :

$$u_{1z} = \frac{2u_{0x}(h_0(x, t) - z)(S - h_{0x}(x, t))}{\sqrt{B^2 - (h_0(x, t) - z)^2(S - h_{0x}(x, t))^2}} \quad (\text{A.38})$$

L'équation (A.38) est justifiée dans la mesure où la zone semi-régide est caractérisée par :

$$z \geq Y_0(x, t) = h_0(x, t) - \frac{B}{S - h_{0x}}$$

On conclut que :

$$u_1(x, z, t) = u_1(x, h_0(x, t), t) - \frac{2B}{S - h_{0x}(x, t)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(S - h_{0x}(x, t))^2}{B^2} (h_0(x, t) - z)^2} \right] \quad (\text{A.39})$$

La composante verticale de la vitesse dans la zone semi-régide est obtenue par la condition d'incompressibilité (A.11) :

$$w_0(x, z, t) = w_0(x, h_0(x, t), t) + u_{0x}(x, t)[h_0(x, t) - z] \quad (\text{A.40})$$

Les paramètres $u_1(x, h_0(x, t), t)$ et $w_0(x, h_0(x, t), t)$ dans les équations (A.39) et (A.40) sont deux constantes d'intégrations qui seront déterminées dans le premier chapitre.

A.3.5 Modèle cinématique

Le modèle cinématique est un modèle réduit qui décrit le problème de Bingham rappelé au début de cet annexe à travers le mouvement de la surface libre. L'inconnue dans le modèle cinématique est $h_0(x, t)$ décrivant la surface libre de l'écoulement.

On utilise l'équation (A.8) pour écrire l'équation d'évolution de la surface libre. Certainement, l'expression de la vitesse horizontale est celle donnée par (A.31) :

$$\frac{\partial h_0}{\partial t}(x, t) + \{u_0(x, Y_0(x, t), t) + \varepsilon u_1(x, z, t)\} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = w(x, h_0(x, t), t)$$

Sans détailler les calculs intermédiaires, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t) = 0} \quad (\text{A.41})$$

avec,

① Si $|h_0(x, t) [S - \frac{\partial h_0}{\partial x}(x, t)]| \geq B$

$$\boxed{Q(h_0, h_{0x}) = \frac{1}{6} Y_0^2(x, t) (3h_0(x, t) - Y_0(x, t)) (S - \frac{\partial h_0}{\partial x}(x, t))} \quad (\text{A.42})$$

② Si $|h_0(x, t) [S - \frac{\partial h_0}{\partial x}(x, t)]| < B$

$$\boxed{Q(h_0, h_{0x}) = 0} \quad (\text{A.43})$$

Index

adimensionalisation, 59, 61, 62

Bingham, 8, 9, 12, 45, 48, 52, 69

cisaillement, 7, 65, 66

conservation de la masse, 9, 42, 47, 59, 67

conservation de la quantité de mouvement,
9, 42, 43, 59, 68

contrainte seuil, 8

développements asymptotiques raccordés, 12,
14, 23, 24

fluide à seuil, 7

fluide newtonien, 7, 34–36, 48, 49

fluide non newtonien, 66

lave, 6

raccord, 12, 14, 16, 18, 19

seuil de contrainte, 7

surface critique, 47, 65–67

tenseur de Cauchy, 8

tenseur de cisaillement, 8

tenseur des contraintes, 8, 66, 68

viscoplastique, 8, 12, 34, 42, 54, 66

zone fluide, 47, 65

zone régide, 47, 65–67

Bibliographie

- [1] M.A.M.AL KHATIB AND S.D.R.WILSON. The development of Poiseuille flow of a yield-stress fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Volume 100, Number 1,1 September 2001, pp.1-8.
- [2] N.J.BALMFORTH AND R.V.CRASTER. A consistent thin-layer theory for Bingham plastics. *Journal of non Fluid Mechanics*, 84, 1999.
- [3] N.J.BALMFORTH, A.S.BURBIDGE, R.V.CRASTER, J.SALZIG AND A.SHEN. Viscoplastic models of isothermal lava domes. *Journal of Fluid Mechanics*, (2000), 403 : 37-65 Cambridge University Press.
- [4] N.J.BALMFORTH, A.S.BURBIDGE, R.V.CRASTER, P.PERONAC, A.C.RUSTD AND R.SASSI. Viscoplastic dam breaks and the Bostwick consistometer. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* Volume 142, Issues 1-3, 16 March 2007, Pages 63-78.
- [5] M. DAMBRINE AND G. VIAL. A multiscale correction method for local singular perturbations of the boundary. *preprint*, March 19, 2007.
- [6] J.-F.GERBEAU AND B.PERTHAME. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar Shallow Water : Numerical validation. *Discrete and continuous dynamical systems-Serie B*, Volume 1, Number 1, February 2001.
- [7] F. HECHT, O. PIRONNEAU, A. LE HYARIC AND K. OHTSUKA Freefem++ documentation, Version 2.11 <http://www.freefem.org/ff++>
- [8] A.M.IL'IN. Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems. *Translations of Mathematical Monographs*, Volume 102, 1992.
- [9] P.-L.LIONS. Modélisation mathématique. *Cours de l'Université Pierre et Marie Curie*, Édition 2003, Réimpression 2006.
- [10] N. ROQUET AND P. SARAMITO. An adaptative finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 6, March 2003.

- [11] L. STARON AND E. J. HINCH. The spreading of a granular mass :role of grain properties and initial conditions. *Granular Matter manuscript : Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics Center for Mathematical Sciences* University of Cambridge, March 2006.

- [12] S.TORDEUX. *Méthodes Asymptotiques pour la Propagation des Ondes dans les Milieux comportant des Fentes*. PhD Thèse, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, Paris ,6 Décembre 2004.

- [13] S.TORDEUX, G.VIAL AND M.DAUGE. *Matching and multiscale expansions for a model singular perturbation problem. Preprint submitted to Elsevier Science.*

- [14] S.TORDEUX. *Méthodes Asymptotiques pour la Propagation des Ondes dans les Milieux comportant des Fentes*. PhD Thèse, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, Paris ,6 Décembre 2004.

- [15] G.VIAL. *Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine à coin*. PhD Thèse, École Normale Supérieure de Cachan, Paris ,26 juin 2003.